

1.75.

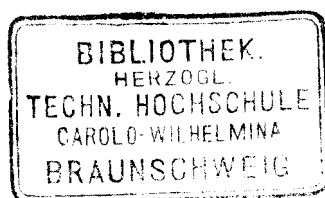
Handwritten notes and stamps, including "F.C. 127" and "12.12.1977".

UB Braunschweig 84



10169-665-6

ABHANDLUNGEN
AUS DEN GEBIETEN DER
MATHEMATIK, PHYSIK, CHEMIE
UND
BESCHREIBENDEN NATURWISSENSCHAFTEN



13-1-12

ABHANDLUNGEN
AUS DEN GEBIETEN DER
MATHEMATIK, PHYSIK, CHEMIE
UND
BESCHREIBENDEN NATURWISSENSCHAFTEN

FESTSCHRIFT
ZUR
FEIER DES SIEBZIGSTEN GEBURTSTAGES
VON
RICHARD DEDEKIND

12.1.12

MIT BEITRÄGEN VON
H. BECKURTS, R. BLASIUS, W. BLASIUS, G. BODLÄNDER, G. FRERICHS,
R. FRICKE, R. MEYER, R. MÜLLER, H. WEBER, A. WERNICKE

MIT TEXTABBILDUNGEN UND EINER TAFEL

BIBLIOTHEK.
HERZOGL.
TECHN. HOCHSCHULE
CAROLO-WILHELMINA
BRAUNSCHWEIG.

TL

BRAUNSCHWEIG
DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN
1901

Alle Rechte, namentlich dasjenige der Uebersetzung in fremde Sprachen,
vorbehalten

DEM GEHEIMEN HOFRATH

HERRN

PROF. DR. RICHARD DEDEKIND

IN BRAUNSCHWEIG

ZUM SIEBZIGSTEN GEBURTSTAGE

VON FREUNDEN UND COLLEGEN GEWIDMET

6. OCTOBER 1901

INHALTSVERZEICHNISS.

I. Mathematik.

	Seite
Ueber die Poincaré'schen Reihen der $(-1)^{\text{ten}}$ Dimension von Robert Fricke	1
Ueber einige Curven, die mit der Theorie des ebenen Gelenkvierecks in Zusammenhang stehen, von R. Müller	37
Zur elementaren Theorie der Kreisbewegung von Alex. Wernicke	71

II. Physik.

Beiträge zur Theorie des Potentials galvanischer Ströme von Heinrich Weber	87
--	----

III. Chemie.

Beiträge zur Kenntniss der Rhodanessigsäuren und der Thiooxyfettsäure-anilide von H. Beckurts und G. Frerichs	127
Die Untersuchung von complexen Verbindungen von G. Bodländer	151
Zur Theorie der Ringschliessung von Richard Meyer	183

IV. Beschreibende Naturwissenschaften.

Bevölkerungsbewegung und Gesundheitszustand der Stadt Braunschweig in den Jahren 1895 bis 1899. Hygienisch-kritische Studie auf statistischer Grundlage von Rudolf Blasius	207
Vorgeschichtliche Denkmäler zwischen Helmstedt, Harbke und Marienborn von Wilhelm Blasius. (Mit einer Tafel)	221

ÜBER DIE
POINCARÉ'SCHEN REIHEN
DER $(-1)^{\text{ten}}$ DIMENSION.

VON
ROBERT FRICKE.

Das Problem der analytischen Darstellung der eindeutigen automorphen Formen ist bisher nur erst nach einer Richtung hin mit besonderem Erfolge bearbeitet worden. Die Darstellung jener Formen durch sogenannte „Poincaré'sche Reihen“ ist vornehmlich durch Poincaré's eigene Forschungen, sowie durch eine Reihe weiterer Untersuchungen vielfach behandelt und zu einem gewissen Abschlusse gebracht.

Die Bildung der Poincaré'schen Reihen beruht bekanntlich auf folgender Ueberlegung. Es seien ξ_1, ξ_2 zwei complexe Variablen, deren Quotient $\xi_1:\xi_2$ durch ξ bezeichnet werden soll; es sei ferner eine „Gruppe Γ linearer Substitutionen“:

(1) $\xi_1^{(k)} = \alpha_k \xi_1 + \beta_k \xi_2, \quad \xi_2^{(k)} = \gamma_k \xi_1 + \delta_k \xi_2, \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$
dieser Variablen vorgelegt, welche in der Ebene der Variablen $\xi = \xi_1:\xi_2$ „eigentlich discontinuirlich“ ist und daselbst ein zusammenhängendes Netz N von unendlich vielen Kreisbogenpolygonen P_0, P_1, P_2, \dots liefert. Wir denken die Substitution (1) unimodular geschrieben:

(2) $\alpha_k \delta_k - \beta_k \gamma_k = 1, \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$

und wollen diese Substitutionen symbolisch durch U_k bezeichnen, wobei insbesondere $U_0 = 1$ die identische Substitution ist.

Zu einem ersten Werthepaare ξ_1, ξ_2 gehören unter diesen Umständen vermöge der Substitutionen U_k unendlich viele Paare $\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}$, welche alle unter einander „bezüglich der Gruppe Γ äquivalent“ heissen. Auch auf die Quotienten $\xi^{(k)} = \xi_1^{(k)}:\xi_2^{(k)}$, welche mit ξ vermöge der Gleichung:

$$\xi^{(k)} = \frac{\alpha_k \xi + \beta_k}{\gamma_k \xi + \delta_k}$$

zusammenhängen, übertragen wir diese Benennung, d. h. wir nennen die Werthe $\xi = \xi^{(0)}, \xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots$ „bezüglich Γ äquivalent“. Ist $\xi = \xi^{(0)}$ ein Werth, der einem Punkte des Polygons P_0 entspricht, so wird $\xi^{(k)}$ den mit ξ homologen Punkt des „zu P_0

äquivalenten“ Polygons P_k bedeuten. Diese für den Quotienten ξ eben angegebenen nicht-homogenen Substitutionen wollen wir symbolisch durch $V_0 = 1, V_1, V_2, \dots$ bezeichnen.

Auf den hiermit dargelegten Ansatz wird nun eine ganz allgemeine mathematische Ideenentwicklung angewandt. Jede wissenschaftliche Forschung geht, wie Kronecker einmal gesagt hat, darauf aus, Aequivalenzen festzustellen und deren Invarianten zu ermitteln. Bei den eben beschriebenen Aequivalenzen betrachtet man als die zugehörigen Invarianten homogene analytische Formen $\varphi(\xi_1, \xi_2)$ der ξ_1, ξ_2 , welche bei Ausübung der Substitutionen U_k auf ξ_1, ξ_2 ihren Werth nicht ändern:

$$(3) \quad \varphi(\alpha_k \xi_1 + \beta_k \xi_2, \gamma_k \xi_1 + \delta_k \xi_2) = \varphi(\xi_1, \xi_2).$$

Indem man noch hinzusetzt, dass die Formen $\varphi(\xi_1, \xi_2)$ im ersten Polygone oder Fundamentalbereiche P_0 der Gruppe frei von wesentlich singulären Stellen sein sollen, gelangt man zum Begriff der „automorphen Formen“, deren Theorie neuestens eine vielseltige Entwicklung erfahren hat.

Poincaré hat uns für die analytische Darstellung solcher automorphen Formen eine Methode geliefert, welche sich besonderer Einfachheit und dabei grosser Tragweite erfreut. Wir wollen unter $H_d(\xi_1, \xi_2)$ irgend eine rationale Form, d. h. irgend eine rationale homogene Function der ξ_1, ξ_2 verstehen, deren Dimension in den ξ_1, ξ_2 durch d bezeichnet werden soll. Mit dieser Form $H_d(\xi_1, \xi_2)$ bilden wir die Reihe:

$$(4) \quad \sum_k H_d(\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}) = \sum_k H_d(\alpha_k \xi_1 + \beta_k \xi_2, \gamma_k \xi_1 + \delta_k \xi_2),$$

wobei sich das Summenzeichen auf alle Substitutionen U_k von Γ beziehen soll. Ist diese Reihe im Bereiche des Polygonnetzes N absolut und gleichmässig convergent, und besitzt sie daselbst überdies einen nicht identisch verschwindenden Summenwerth, so wird dieselbe eine automorphe Form unserer Art darstellen:

$$(5) \quad \varphi_d(\xi_1, \xi_2) = \sum_k H_d(\alpha_k \xi_1 + \beta_k \xi_2, \gamma_k \xi_1 + \delta_k \xi_2).$$

Indem wir uns vorbehalten, weiter unten den hiermit beschriebenen Ansatz noch einer gewissen Erweiterung zu unterziehen, wollen wir für die Reihen von der Gestalt (4) fortan die Bezeichnung „Poincaré'sche Reihen“ benutzen.

Die Convergenzuntersuchung der Poincaré'schen Reihen ist vielfach behandelt, aber allerdings zur Zeit noch nicht völlig zum Abschluss gebracht. Die ersten und wichtigsten in dieser Richtung liegenden Untersuchungen rühren von Poincaré selber her. Letzterer zeigte, dass, wenn kein Pol der rationalen Form H_d in einen Grenzpunkt von Γ fällt, die Reihe (4) für $d \leq -4$ stets im obigen Sinne convergent ist, sowie dass ferner bei Gruppen mit Hauptkreis die gleiche Convergenz auch bei $d = -3$ stattfindet. Indessen ist hiermit die Grenze der Convergenz noch nicht immer erreicht. Unter gewissen beschränkenden Voraussetzungen betreffs der Gruppe Γ sind nämlich auch noch die Reihen $(-2)^{\text{ter}}$ Dimension absolut und gleichmässig convergent. Diesen Fall betreffen Untersuchungen von Schottky, Burnside und Ritter, von denen die zweite unten noch ausführlich genannt werden wird. Insbesondere findet diese Convergenz statt bei allen Gruppen mit Hauptkreis, der aber kein Grenzkreis des Netzes N ist, bei denen also das Netz N bis auf unendlich viele isolirt auf dem Hauptkreise gelegene Grenzpunkte die ganze ξ -Ebene überspannt.

Bis zu dieser Stelle habe ich die Convergenztheorie der Poincaré'schen Reihen in dem Werke „Vorlesungen über die Theorie der automorphen Functionen“, welches ich in Gemeinschaft mit F. Klein herausgebe¹⁾, ausführlich dargestellt.

Es ist nun bisher in Deutschland noch nicht ausreichend beachtet worden, dass die Burnside'sche Convergenzbetrachtung auch noch auf die Dimension $d = -1$ ausgedehnt werden kann, wie Burnside selbst in seiner unten zu nennenden Abhandlung angiebt. Auch in meinem eben genannten Werke habe ich diesen Fall ausser Acht gelassen, und zwar weil ich die für die Dimensionen $d \leq -2$ seitens der ausgeführten Theorie der automorphen Formen für die Untersuchung der Poincaré'schen Reihen zur Verfügung gestellten Schlussweisen bei $d = -1$ nicht ohne Weiteres anwenden konnte. In der vorliegenden Abhandlung will ich nun, unter Anknüpfung an die Burnside'sche Convergenzbetrachtung, die Theorie der Poincaré'schen Reihen $(-1)^{\text{ter}}$ Dimension in Angriff nehmen.

¹⁾ Bd. 1 (1897); Bd. 2, Lief. 1 (1901) bei B. G. Teubner in Leipzig. Dieses Werk ist weiterhin als „Vorl.“ unter Angabe des Bandes und der Seite citirt.

§. 1. Fundamentalpolygone der Hauptkreisgruppen mit isolirt liegenden Grenzpunkten.

Um der folgenden Untersuchung eine übersehbare Basis zu geben, sollen weiterhin nur Hauptkreisgruppen Γ zugelassen werden. Auch wollen wir annehmen, dass in Γ keine Substitutionen vorkommen, welche beide Seiten des Hauptkreises austauschen. Eine Gruppe, welche Substitutionen der letzteren Art aufweist, enthält stets eine ausgezeichnete Untergruppe des Index 2, welche frei von solchen Substitutionen ist. Wir haben für unsere Gruppe vor Allem vorauszusetzen, dass die Grenzpunkte derselben auf dem Hauptkreise isolirt liegen, und dass mithin das Polygonnetz N die ganze ξ -Ebene bis auf jene unendlich vielen Grenzpunkte überspannt.

Ueber die Gestalt des Ausgangs- oder Fundamentalpolygons P_0 habe ich in „Vorl.“ I eine ausführliche Theorie entwickelt, welche indessen für die hier vorliegenden Zwecke einiger Ergänzungen bedarf. Bei jener Untersuchung war es von der grössten Bedeutung, dass die geometrischen Erwägungen nicht sogleich in der ξ -Ebene, sondern in der a. a. O. vorangestellten „projectiven Ebene“ ausgeführt wurden. In letzterer lag ein „absoluter Kegelschnitt“ zu Grunde, der zweckmässig als Ellipse gewählt wurde. Die a. a. O. näher besprochene Beziehung der projectiven Ebene auf die ξ -Ebene ist dann eine solche, dass jene Ellipse selbst dem Hauptkreise entspricht, während der einzelne Punkt im Innern der Ellipse immer zweien bezüglich des Hauptkreises symmetrischen Punkten correspondirt.

In „Vorl.“ I, 319 habe ich den grundlegenden Satz gezeigt, dass das Fundamentalpolygon P_0 in der projectiven Ebene stets als geradliniges Polygon von $2n' + 4p'$ Seiten und von lauter concaven Winkeln ausgewählt werden kann. Hierbei bedeutet n' die Anzahl der „festen“ Polygonecken, d. h. derjenigen Ecken, welche Fixpunkte von Substitutionen der Gruppe sind. Andererseits ist p' das „projective Geschlecht“ des Polygons, welches den Grad des Zusammenhanges derjenigen geschlossenen Fläche F_0 misst, die aus P_0 durch Zusammenbiegen

auf einander bezogener Seiten entspringt. Diese Zusammenordnung der Seiten ist aber die folgende. Erstlich gehören je zwei Seiten zusammen, welche in einer „festen Ecke“ zusammenstossen; die betreffende erzeugende Substitution ist elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch, je nachdem jener feste Eckpunkt innerhalb, auf oder ausserhalb der absoluten Ellipse gelegen ist. Weiter haben wir p' Systeme von je vier auf einander folgender Seiten, wobei jedesmal die erste auf die dritte, die zweite auf die vierte durch hyperbolische Erzeugende bezogen ist (man vergl. die weiter unten folgenden Figuren).

Soll der bei uns in Betracht kommende Fall vorliegen, so muss mindestens eine feste Ecke hyperbolisch sein, wobei alsdann P_0 einen daselbst über die Ellipse hinausragenden Zipfel bekommt, der natürlich für die Abbildung auf die ξ -Ebene verloren geht. Es können auch mehrere, ja alle n' festen Ecken hyperbolisch sein; im letzteren Falle besteht Γ ausschliesslich aus hyperbolischen Substitutionen.

Es sind nun einige abgeänderte Gestalten des Polygons P_0 (namentlich auch für die Fortführung der vorliegenden Untersuchung) von grösster Bedeutung. Eine erste dieser Gestalten wird durch folgende Betrachtung eingeführt. Ein einzelnes der p' Seitenquadrupel lieferte zwei Erzeugende von Γ , die symbolisch durch V_a und V_b bezeichnet werden mögen. Wir gesellen ihnen alsdann die in Γ enthaltene hyperbolische Substitution:

$$V_c = V_b V_a^{-1} V_b^{-1} V_a$$

als überzählige erzeugende Substitution hinzu. Durch eine Abänderung, welche zunächst nur die vier Seiten des eben gemeinten Quadrupels betrifft, können wir dieselben in der That durch sechs Seiten ersetzen, von denen zwei zu V_c , zwei zu V_a und endlich zwei zu V_b gehören (cf. „Vorl.“ I, 316).

Ueben wir nun diese Abänderung an allen p' Quadrupeln einander kreuzweise zugewiesener Seiten aus, so gelangen wir zu einem Polygon von $2n' + 6p'$ Seiten, und es kommen die p' überzähligen Erzeugenden $V_{c_1}, V_{c_2}, \dots, V_{c_{p'}}$ hinzu.

An dieser Gestalt des Polygons ist die Möglichkeit der Composition unserer Gruppe Γ aus einfachen Gruppen besonders leicht zu übersehen. Nennen wir die den n' festen

Ecken correspondirenden Erzeugenden V_1, V_2, \dots, V_n , so nehmen wir erstlich $V_1, \dots, V_n, V_{c_1}, \dots, V_{c_{p'}}$ als Erzeugende zusammen. Aus ihnen entspringt eine Gruppe, bei welcher an Stelle der bisherigen Zahlen p', n' die Zahlen $0, n' + p'$ treten. Nehmen wir weiter $V_{a_1}, V_{b_1}, V_{c_1}$ für sich, sodann $V_{a_2}, V_{b_2}, V_{c_2}$ u. s. w., so entstehen p' Gruppen, bei denen die Zahlen p', n' insbesondere die Werthe 1,1 haben. Man bezeichnet die Zusammenstellung (p', n') dieser Zahlen als „Charakter“ der Gruppe Γ . Man kann alsdann sagen, die Gruppe Γ könne durch Composition aus einer Gruppe des Charakters $(0, n' + p')$ und p' Gruppen der Charaktere (1,1) hergestellt werden (cf. „Vorl.“ I, 310 ff.).

In dem für uns in Betracht kommenden Falle, dass P_0 mindestens einen über die Ellipse hinausragenden hyperbolischen Zipfel besitzt, können wir nun die Decomposition der Gruppe Γ noch wesentlich weiter treiben. Einen ersten Schritt habe ich in dieser Hinsicht bereits in „Vorl.“ II, 216 gethan. Die nähere Betrachtung der „zufälligen“ oder „beweglichen“ Polygonecken wird hier von Wichtigkeit. Diese Ecken ordnen sich zu $p' + 1$ Cyklen zusammen. Ein erster Cyklus wird nämlich von $n' + p'$ Ecken gebildet und ihm entspricht die Relation:

$$V_1 \cdot V_2 \dots V_n \cdot V_{c_1} \cdot V_{c_2} \dots V_{c_{p'}} = 1$$

zwischen den Erzeugenden. Weiter kommen p' Cyklen zu je fünf Ecken, denen die Relationen parallel laufen:

$$\begin{aligned} V_{a_1}^{-1} V_{b_1} V_{a_1} V_{b_1}^{-1} V_{c_1} &= 1, \\ V_{a_2}^{-1} V_{b_2} V_{a_2} V_{b_2}^{-1} V_{c_2} &= 1, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Es ist nun a. a. O. gezeigt, dass man zunächst die $n' + p'$ Ecken des ersten Cyklus über die absolute Ellipse hinaus führen kann. Die Wirkung dieser Abänderung wird am besten in der ξ -Ebene evident; wir wollen hieselbst den Hauptkreis zur reellen ξ -Achse machen und nehmen übrigens an, dass das projective Polygon insgesamt $h > 0$ hyperbolische Ecken hat. In der ξ -Ebene wird das Polygon P_0 in der eben zuletzt gedachten Gestalt einen bezüglich der reellen Achse symmetrisch gebauten Bereich darstellen, dessen Rand aus

$$(n' - h) + 2(h - 1) + p' = n' + h + p' - 2$$

getrennten Theilen besteht. In der That erscheint jetzt Γ decomponirt in:

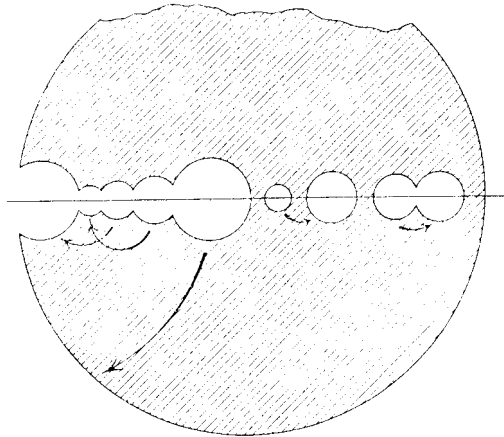
1. $n' - h$ cyklische elliptische oder parabolische Gruppen, wobei der Fundamentalbereich der einzelnen solchen cyklischen Gruppe einen aus zwei Kreisbogen bestehenden zusammenhängenden Rand hat,

2. $h - 1$ cyklische hyperbolische Gruppen, deren einzelne einen von zwei getrennt verlaufenden Vollkreisen berandeten Fundamentalbereich besitzt.

3. p' Gruppen, die in der ξ -Ebene den Charakter (2,0) bekommen; dabei ist der einzelne Fundamentalbereich durch eine Kette von zehn Kreisbogen berandet.

Hierbei gilt von jedem componirenden Fundamentalbereiche, dass sich die gesammten Randcurven aller übrigen Bereiche gänzlich im Innern jenes Bereiches finden. Die hier beigefügte Figur 1, welche dem Falle $n' = 3$, $h = 2$, $p' = 1$ entspricht, möge diese Verhältnisse erläutern.

Fig. 1.

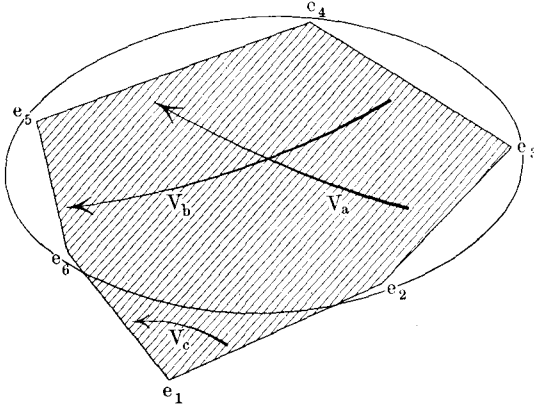


Wir können nun eine wichtige Weiterführung der hier skizzirten Ueberlegung an den p' zuletzt genannten Gruppen vornehmen. Man gehe zu diesem Ende nochmals auf die projective Ebene zurück, wo die einzelne jener p' Gruppen als Fundamentalbereich ein Sechseck der in Figur 2 (a. f. S.)

skizzirten Gestalt aufweist. Die fünf „beweglichen“ zu einem Cyklus zusammengehörigen Ecken sind hier e_2, e_3, \dots, e_6 , während die ausserhalb der Ellipse angedeutete „feste“ Ecke e_1 den Fixpunkt der hyperbolischen Substitution V darstellt. Die Randgeraden aller übrigen componirenden Bereiche finden längs des dem Innern jenes Sechseckes angehörenden Segmentes der Ellipse Platz.

Wir können nun die Ecke e_2 längs der von e_2 nach e_1 ziehenden Niveaugeraden von V_c bis zum Punkte b der Ellipse selbst führen, wobei zu gleicher Zeit die Punkte e_3, e_4, e_5, e_6 bis zu Punkten der Ellipse fortgewandert sind. Vier unter

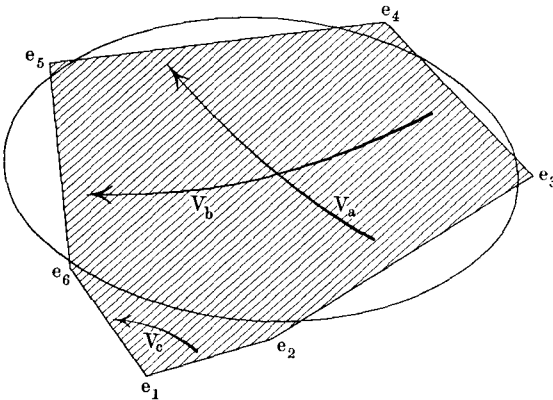
Fig. 2.



den Seiten unseres Bereiches sind damit Ellipsensehnen geworden, die paarweise durch V_a und V_b auf einander bezogen sind. Eine Collision dieser Ellipsensehnen mit sonstigen Seiten des Gesamtpolygons P_0 ist hierbei ausgeschlossen.

Wir können sogar, ohne dass eine solche Collision eintritt, e_2 noch um ein endliches Stück über die Ellipse hinausführen. Hierdurch gewinnt unser Sechseck die in Figur 3 skizzierte Gestalt. Für die

Fig. 3.



ξ -Ebene geht der ausserhalb der Ellipse gelegene Theil verloren; die vier Ellipsensehnen aber liefern vier Vollkreise, die paarweise einander vermöge V_a, V_b zugeordnet sind. Figur 4 (a. f. S.) bringt die nun vorliegenden Verhältnisse zur Anschauung.

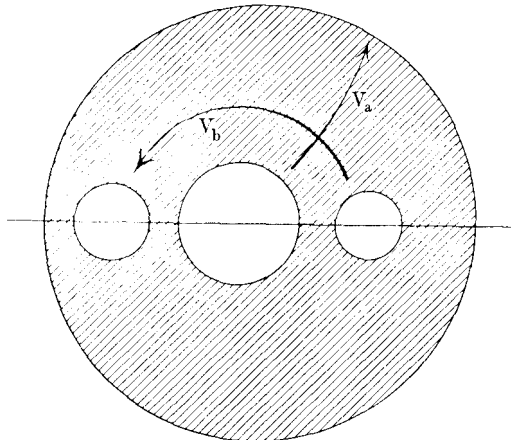
Wir haben auf diese Weise den für die weitere Ueberlegung grundlegenden Satz gewonnen: Das Fundamentalpolygon einer Gruppe mit Hauptkreis, welche auf letzterem

eigentlich discontinuirlich ist, lässt sich, unter (p', n') den projectiven Charakter verstanden, in der ξ -Ebene stets so gestalten, dass es, abgesehen von $2n' - 2h$ Paaren parabolisch oder elliptisch zusammengeordneter Kreise resp. Kreisbogen, von

$4p' + 2h - 2$
getrennt verlaufenden Vollkreisen begrenzt ist.

Vornehmlich wird uns der Fall beschäftigen, dass elliptische und parabolische Substitutionen überhaupt nicht auftreten. Als dann ist $h = n'$, und das Polygon P_0 ist in der ξ -Ebene derart wählbar, dass es durch $2n' + 4p' - 2$ Vollkreise, die getrennt von einander verlaufen, berandet ist.

Fig. 4.



§. 2. Herstellung einer Untergruppe ohne elliptische Substitutionen.

Burnside hat bei seiner Convergencebetrachtung eine Schwierigkeit im Auftreten elliptischer Substitutionen in Γ gesehen. Indessen lässt sich diese Schwierigkeit leicht überwinden. Selbstverständlich ist zunächst aus den allerersten Principien der Theorie der Poincaré'schen Reihen folgender Satz: Enthält Γ eine Untergruppe von endlichem Index, für welche die Poincaré'schen Reihen der Dimension d convergiren, so sind auch für die Gesamtgruppe die Reihen eben dieser Dimension d convergent.

Wir dürfen uns demnach darauf beschränken, die Convergencebetrachtung auf den Fall einer von elliptischen Substitutionen freien Gruppe zu beziehen, sofern es gelingt, den folgenden Satz

zu zeigen: In jeder unserer Gruppen Γ existiren Untergruppen endlicher Indices, welche keine elliptischen Substitutionen mehr enthalten.

Um diesen Satz zu zeigen, gehe man nochmals auf das projective Polygon P_0 zurück und stelle aus demselben durch Zusammenbiegung auf einander bezogener Seiten eine geschlossene Fläche her, welche kurz F_0 genannt werden soll. Es mögen insgesamt ν elliptische Erzeugende von Γ vorliegen, deren Perioden durch l_1, l_2, \dots, l_ν bezeichnet werden sollen. Den ν zugehörigen festen Polygonecken mögen die Punkte e_1, e_2, \dots, e_ν auf F_0 entsprechen. P_0 hat überdies mindestens eine hyperbolische Ecke. Kommen mehrere vor, so wählen wir eine von ihnen aus und nennen den zugehörigen Punkt von F_0 etwa e . Demnächst ziehen wir von den ν Stellen e_1, e_2, \dots, e_ν ebenso viele sich nicht überkreuzende Schnitte s_1, s_2, \dots, s_ν , welche sämmtlich in e münden.

Es sei nun l das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen l_1, l_2, \dots, l_ν . Alsdann sollen l Exemplare der zerschnittenen Fläche F_0 über einander geschichtet werden, und es sollen hierauf die Schnittränder in geeigneter Weise wieder zusammengefügt werden. Letzteres soll so geschehen, dass an der einzelnen Stelle e_k insgesamt $\frac{l}{l_k}$ Verzweigungspunkte zu je l_k Blättern über einander liegen. Offenbar lässt sich dies noch in mannigfacher Weise erreichen. Haben wir an allen Stellen e_1, e_2, \dots, e_ν die Anordnung der Blätter festgelegt, so wird die Verzweigung bei e gleichfalls eine bestimmte sein; doch braucht letztere nicht weiter bekannt zu sein.

Die gewonnene geschlossene l -blättrige Fläche soll nunmehr rückwärts auf das Polygonnetz der projectiven Ebene abgebildet werden. Dabei folgert man vermöge einer bekannten Ueberlegung aus dem einfachen Zusammenhange des Netzes, dass sich die l Blätter der Fläche auf l verschiedene, neben einander liegende Polygone des Netzes übertragen. In diesem Complexe von l Polygonen erscheinen jetzt die früheren elliptischen Ecken rings umschlossen. Dieser Polygoncomplex wird uns somit den Fundamentalbereich einer Untergruppe Γ_l des endlichen Index l liefern, welche keine einzige der elliptischen Substitutionen von Γ_0 mehr enthält. Unser oben ausgesprochenes Theorem ist damit bewiesen.

Auf anderem Wege kann man zu dem gleichen Ergebnisse vermöge der unten näher zu besprechenden Multiplicatorsysteme der automorphen Formen gelangen. Indessen soll die sich hier anknüpfende Ueberlegung an dieser Stelle nicht weiter verfolgt werden.

§. 3. Convergenzuntersuchung der Poincaré'schen Reihen der $(-1)^{\text{ten}}$ Dimension.

Während bei den geometrischen Betrachtungen der beiden vorausgehenden Paragraphen die mit V_k bezeichneten nicht-homogenen Substitutionen:

$$(1) \quad \zeta_{(1)} = \frac{\alpha_k \zeta + \beta_k}{\gamma_k \zeta + \delta_k}$$

der Gruppe Γ zunächst allein in Betracht kamen, kehren wir jetzt zu der ursprünglich in der Einleitung zu Grunde gelegten homogenen unimodularen Schreibweise (1) S. 3 der Substitutionen zurück. In dieser Gestalt bezeichnen wir, wie oben schon in Aussicht genommen wurde, die Substitutionen symbolisch durch U_k .

Den Ansatz der Poincaré'schen Reihen wollen wir nunmehr so allgemein fassen, als es die entwickelte Theorie der automorphen Formen erfordert. In der That hat man diese Formen, die wir allgemein durch $\varphi(\xi_1, \xi_2)$ bezeichnen, neuerdings so fixirt, dass sie gegenüber U_k nicht absolut invariant sind, sondern sich bis auf einen constanten, d. i. von den ξ_1, ξ_2 unabhängigen Factor μ_k reproduciren, der aber in jedem Falle, d. h. bei der einzelnen Substitution U_k und der einzelnen Form $\varphi(\xi_1, \xi_2)$ ein bestimmter sein soll:

$$(2) \quad \varphi(\alpha_k \xi_1 + \beta_k \xi_2, \gamma_k \xi_1 + \delta_k \xi_2) = \mu_k \cdot \varphi(\xi_1, \xi_2).$$

Dieser Forderung entspricht der Begriff der „eindeutigen“ automorphen Formen. Den noch etwas allgemeineren Begriff der „unverzweigten“ automorphen Formen können wir hier abseits lassen, da er in der Theorie der Poincaré'schen Reihen nicht unmittelbar zur Geltung kommt (vergl. übrigens „Vorl.“ II, 66 ff.).

Im nächsten Paragraphen kommen wir auf diese Multiplicatoren μ_k der Formen $\varphi(\xi_1, \xi_2)$ noch etwas ausführlicher zurück. Wir werden sehen, dass die den elliptischen Substitutionen ent-

sprechenden Multiplicatoren immer Einheitswurzeln sein müssen. Sind alle Multiplicatoren einer Form Zahlen des absoluten Betrages 1, so benenne ich $\varphi(\xi_1, \xi_2)$ als eine „unimultiplicative“ Form.

Wir können nun in Gestalt von Poincaré'schen Reihen einstweilen nur solche unimultiplicativen Formen darstellen. Von dem zu U_k gehörenden Multiplicator μ_k setzen wir also:

$$(3) \quad |\mu_k| = 1$$

voraus. Wie diese Multiplicatoren μ_k des Näheren gewählt sein müssen, betrachten wir, wie schon bemerkt, in §. 4.

Ist jetzt $H(\xi_1, \xi_2)$ eine rationale Form $(-1)^{\text{ter}}$ Dimension der ξ_1, ξ_2 , so bilde man, um eine Form mit vorgegebenen Multiplicatoren μ_k zu gewinnen, etwas allgemeiner als in (5) (S. 4) die Poincaré'sche Reihe:

$$(4) \quad \sum_k \mu_k^{-1} H(\alpha_k \xi_1 + \beta_k \xi_2, \gamma_k \xi_1 + \delta_k \xi_2),$$

wo sich die Summe auf alle Substitutionen U_k der homogenen Gruppe Γ bezieht. Für die Betrachtung der Convergenz dieser Reihe $(-1)^{\text{ter}}$ Dimension benutze ich nun die Art der Ueberlegung, welche Burnside in seiner schon oben erwähnten Abhandlung „On a Class of Automorphic Functions“¹⁾ zur Verwendung bringt.

Hierbei soll noch der Fall, dass Γ auch parabolische Substitutionen enthält, zum Ausschluss gebracht werden. Es hat freilich, wie auch Burnside vermuthet, dieser Fall keineswegs einen principiell anderen Charakter. Doch bringt derselbe gewisse Umständlichkeiten mit sich, denen ich an der vorliegenden Stelle aus dem Wege gehen möchte. Kommen elliptische Substitutionen in Γ vor, so gehen wir auf Grund des im vorigen Paragraphen abgeleiteten Satzes zunächst zu einer von elliptischen Substitutionen freien Untergruppe eines endlichen Index. Ist für diese die Convergenz der Reihe (4) gezeigt, so besteht sie für die mit der gleichen Form H bei der ursprünglichen Gruppe angesetzte Reihe (4) ohne Weiteres auch. Hiernach ist es keine weitere Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir zufolge §. 1

¹⁾ Proceedings of the London Mathematical Society, Bd. 23 (1892).

annehmen, dass der Fundamentalbereich P_0 von r Paaren getrennt von einander verlaufender Vollkreise begrenzt ist. Dabei werden die Kreise des einzelnen Paares hyperbolisch auf einander bezogen sein; die correspondirenden r Erzeugenden der Gruppe Γ mögen in der nicht-homogenen Gestalt durch V_1, V_2, \dots, V_r bezeichnet sein.

Natürlich halten wir an der Voraussetzung fest, dass die Pole von $H(\xi_1, \xi_2)$ nicht in Grenzpunkte des Polygonnetzes fallen. Aus den ersten Grundlagen der Theorie der Poincaré'schen Reihen (cf. „Vorl.“ II, 142) ergibt sich alsdann, dass die Reihe (4) absolut convergent ist, falls die Reihe:

$$\sum_k \frac{1}{\gamma_k \xi + \delta_k}$$

convergiert. Man schreibe nun diese Reihe so:

$$\sum_k \frac{1}{\gamma_k} \cdot \left| \xi + \frac{\delta_k}{\gamma_k} \right|$$

und beachte, dass die Werthe $-\frac{\delta_k}{\gamma_k}$ die bezüglich Γ mit ∞ äquivalenten Punkte liefern. Wir denken den Ausgangsbereich P_0 derart gewählt, dass der Punkt ∞ im Innern dieses Bereiches liegt, und schränken ξ auf einen kleinen Bereich in irgend einem der Polygone des Netzes ein. Da alsdann ξ nur mit einem der Punkte $-\frac{\delta_k}{\gamma_k}$ im gleichen Polygone liegt, so werden die Beträge

$\left| \xi + \frac{\delta_k}{\gamma_k} \right|$, abgesehen von einem einzigen, der für die Frage der Convergenz unserer Reihe nicht in Betracht kommen kann, sämtlich oberhalb einer angebbaren, von null verschiedenen endlichen Zahl liegen. Wir finden somit, dass die Reihe (4) absolut und gleichmässig convergent sein wird, falls die Reihe:

$$(5) \quad \sum_k \gamma_k^{-1}$$

convergent ist.

Für die Glieder dieser Reihe wollen wir nun nach folgendem Princip eine bestimmte Anordnung herstellen. An das Ausgangspolygon P_0 , welches den Punkt ∞ enthält, lagern sich in den $2r$ zunächst offen bleibenden Vollkreisen ebenso viele weitere

Polygone unmittelbar an, welche den Substitutionen $J_1^{\pm 1}, J_2^{\pm 1}, \dots, J_r^{\pm 1}$ entsprechen. Diese $2r$ Polygone fassen wir zu einem ersten Complex zusammen. Es bleiben alsdann $2r(2r-1)$ Kreisflächen noch unbedeckt. Die $2r(2r-1)$ sich hier unmittelbar anschliessenden Polygone mögen einen zweiten Complex zusammensetzen, worauf $2r(2r-1)^2$ Kreisflächen offen bleiben. Die $2r(2r-1)^2$ sich demnächst anschliessenden Polygone bilden den dritten Complex. In der hiermit eingeleiteten Weise, Polygoncomplexe herzustellen, fahren wir weiter und weiter fort. Es werden so nach und nach alle Polygone des Netzes erschöpft; und zwar besteht der ν^{te} Polygoncomplex aus $2r(2r-1)^{\nu-1}$ Polygonen, während nach Herstellung des ν^{ten} Complexes die Anzahl der noch frei bleibenden Kreisflächen $2r(2r-1)^{\nu}$ sein wird.

Es sei nun S_ν die Summe derjenigen Glieder der Reihe (5), welche zum ν^{ten} Polygoncomplex gehören. Wir bringen dann die Reihe (5) in die Anordnung:

$$(6) \quad S_1 + S_2 + S_3 + \dots$$

und prüfen in dieser Gestalt die Convergenz.

Die $2r$ Randkreise des ersten Polygons P_0 mögen $K_{+1}, K_{-1}, K_2, K_{-2}, \dots, K_{+r}, K_{-r}$ genannt werden. Dieselben sollen durch die Erzeugenden in der Weise auf einander bezogen sein, dass:

$$(7) \quad K_1 = V_1(K_{-1}), K_2 = V_2(K_{-2}), \dots, K_r = V_r(K_{-r})$$

zutrifft. Die Polygone des ν^{ten} Complexes werden offenbar von denjenigen Substitutionen der Gruppe Γ geliefert, welche sich symbolisch als Producte von ν Factoren:

$$(8) \quad V_{a_1}^{\varepsilon_1} \cdot V_{a_2}^{\varepsilon_2} \cdot V_{a_3}^{\varepsilon_3} \dots V_{a_\nu}^{\varepsilon_\nu}$$

darstellen. Dabei werden die Indices a Zahlen aus der Reihe $1, 2, 3, \dots, r$ bedeuten, die Exponenten ε aber entweder gleich $+1$ oder -1 sein. Wesentlich ist dabei noch, dass keine zwei auf einander folgende Factoren in (8) einander invers sein dürfen. Um vom Ausgangspolygon bis zu dem der Substitution (8) entsprechenden Polygone zu gelangen, hat man im Polygonnetze einen Weg zu beschreiben, welcher der Reihe nach die Kreise $K_{\varepsilon_1 a_1}, K_{\varepsilon_2 a_2}, K_{\varepsilon_3 a_3}, \dots, K_{\varepsilon_\nu a_\nu}$ überschreitet.

Wir haben nun zunächst noch für die erzeugenden Substitutionen eine analytische Entwicklung durchzuführen. Eine

einzelne der $2r$ Substitutionen $V_1^{\pm 1}, V_2^{\pm 1}, \dots, V_r^{\pm 1}$ nennen wir für den Augenblick V , ihre Coefficienten aber $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Die Fixpunkte der Substitution, welche durch Lösung der Gleichung:

$$\gamma \xi^2 + (\delta - \alpha) \xi - \beta = 0$$

zu berechnen sind, mögen auf der reellen ξ -Achse bei η_1 und η_2 gelegen sein, und zwar möge V die Punkte der ξ -Ebene von η_1 fort nach η_2 hin transformiren. Wir haben alsdann, wenn V in Uebereinstimmung mit $\alpha + \delta > 2$ geschrieben wird, als Gestalt der Substitution:

$$(9) \quad \frac{\xi' - \eta_1}{\xi' - \eta_2} = \sigma^2 \frac{\xi - \eta_1}{\xi - \eta_2},$$

wo η_1, η_2 und der „Multiplier“ σ^2 der Substitution gegeben sind durch:

$$\eta_1 = \frac{\alpha - \delta - \sqrt{(\alpha + \delta)^2 - 4}}{2\gamma}, \quad \eta_2 = \frac{\alpha - \delta + \sqrt{(\alpha + \delta)^2 - 4}}{2\gamma},$$

$$\sigma = \frac{\alpha + \delta + \sqrt{(\alpha + \delta)^2 - 4}}{2}.$$

Man merke an, dass hierbei $\sigma > 1$ zutrifft. Die Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ stellen sich aber in σ, η_1, η_2 so dar:

$$(10) \quad \begin{cases} \alpha = \frac{\eta_1 \sigma^{-1} - \eta_2 \sigma}{\eta_1 - \eta_2}, & \beta = \frac{\eta_1 \eta_2 (\sigma - \sigma^{-1})}{\eta_1 - \eta_2}, \\ \gamma = \frac{\sigma^{-1} - \sigma}{\eta_1 - \eta_2}, & \delta = \frac{\eta_1 \sigma - \eta_2 \sigma^{-1}}{\eta_1 - \eta_2}. \end{cases}$$

Der eigentliche Nerv der Convergencebetrachtung besteht nun in folgender Ueberlegung. Irgend ein Polygon des v^{ten} Complexes gehöre zu der Substitution:

$$(11) \quad V_v = V_{a_1}^{\epsilon_1} \cdot V_{a_2}^{\epsilon_2} \cdot V_{a_3}^{\epsilon_3} \dots V_{a_v}^{\epsilon_v},$$

deren Coefficienten $\alpha_v, \beta_v, \gamma_v, \delta_v$ genannt werden mögen. Von hier stellen wir $2r - 1$ Polygone des folgenden Complexes her, indem wir die Substitutionen $V V_r$ heranziehen, wo V alle $2r - 1$ von $V_{a_1}^{-\epsilon_1}$ verschiedenen Erzeugenden durchläuft. Eine einzelne dieser Substitutionen nenne man V_{r+1} , ihre Coefficienten aber $\alpha_{r+1}, \beta_{r+1}, \gamma_{r+1}, \delta_{r+1}$; dann gelten die Gleichungen:

$$\alpha_{r+1} = \alpha \alpha_v + \beta \gamma_v, \quad \beta_{r+1} = \alpha \beta_v + \beta \delta_v,$$

$$\gamma_{r+1} = \gamma \alpha_v + \delta \gamma_v, \quad \delta_{r+1} = \gamma \beta_v + \delta \delta_v.$$

Mit Benutzung der Gleichungen (10) ergibt sich hieraus:

$$(12) \quad \frac{\gamma_{r+1}}{\gamma_r} = \sigma \frac{\eta_1 - \frac{\alpha_r}{\gamma_r}}{\eta_1 - \eta_2} + \sigma^{-1} \frac{\frac{\alpha_r}{\gamma_r} - \eta_2}{\eta_1 - \eta_2}.$$

Man beachte nun, dass $\frac{\alpha_r}{\gamma_r}$ bezüglich V_r mit ∞ äquivalent ist. Somit wird der Punkt $\frac{\alpha_r}{\gamma_r}$ im Innern des Kreises $K_{\varepsilon_1 a_1}$ gelegen sein, der zur ersten in (11) rechts auftretenden Substitution gehört. Da andererseits η_1 im Innern des einen zu V gehörenden und von $K_{\varepsilon_1 a_1}$ verschiedenen Kreises K_{-1} liegt, so können wir für den absoluten Betrag $\left| \eta_1 - \frac{\alpha_r}{\gamma_r} \right|$ aus der Gestalt von P_0 sofort eine von 0 verschiedene positive untere Grenze angeben. Desgleichen werden wir für $\left| \frac{\alpha_r}{\gamma_r} - \eta_2 \right|$ eine endliche obere Grenze bestimmen können. Dabei ist besonders wichtig, dass diese beiden Grenzen von r unabhängig sind.

Wir nehmen jetzt eine Abänderung der Gestalt des Polygons P_0 vor; und zwar sollen die Kreise K_{+i} und K_{-i} des einzelnen der r Paare unter Erhaltung der Fixpunkte der zugehörigen V_i , d. i. im System der Niveaucurven von V_i , zusammengezogen werden. Hierbei wird die untere für $\left| \eta_1 - \frac{\alpha_r}{\gamma_r} \right|$ soeben angegebene Grenze nicht verkleinert, die obere für $\left| \frac{\alpha_r}{\gamma_r} - \eta_2 \right|$ aufgestellte Grenze aber nicht vergrößert werden. Andererseits wird aber der Multiplicator σ der Substitution V_i hierbei wachsen, und er kann durch hinreichend weit getriebene Zusammenziehung über jede angebbare Zahl hinaus vergrößert werden.

Man schreibe daraufhin, unter τ eine positive, den Betrag $2r - 1$ übertreffende Zahl verstanden, die Ungleichung:

$$(13) \quad \left| \frac{\gamma_{r+1}}{\gamma_r} \right| \geq \tau > 2r - 1$$

vor, und zwar für jedes Polygon des r^{ten} Complexes und jedes mit ihm in der betrachteten Weise zusammenhängende Polygon des folgenden Complexes. Da die eben wiederholt genannten

Grenzen von ν unabhängig sind, so kann man, falls die Ungleichung (13) noch nicht vermöge jener Grenzen erfüllt sein sollte, eine Vergrößerung der r Multiplicatoren σ um endliche Beträge derart eintreten lassen, dass der Ungleichung (13) bei allen Complexen und je zwei zugehörigen Polygonen Genüge geschieht.

Nun reihen sich an jedes Polygon des ν^{ten} Complexes $2r - 1$ Polygone des folgenden Complexes. Summiren wir die auf diese bezüglichen Ungleichungen:

$$|\gamma_v^{-1}| \geq \tau |\gamma_{v+1}^{-1}|,$$

so ergibt sich:

$$(2r - 1) |\gamma_v^{-1}| \geq \tau \sum |\gamma_{v+1}^{-1}|.$$

Man schreibe jetzt $2r - 1 = q \cdot \tau$, so dass q eine positive, im Intervall $0 < q < 1$ gelegene Zahl sein wird. Addiren wir alsdann die letzte Ungleichung, gebildet für alle $2r(2r - 1)^{r-1}$ Polygone des ν^{ten} Complexes, so ergibt sich, wenn wir die bereits in (6) benutzte Bezeichnung wieder aufnehmen:

$$(14) \quad S_{v+1} \leq q S_v$$

als eine für jedes ν gültige Ungleichung. Man sieht daraufhin, dass die auf ihre Convergenz zu untersuchende Reihe (6) mindestens ebenso schnell convergent ist, wie die geometrische Reihe vom Quotienten q .

Endlich wolle man noch überlegen, dass bei der oben gedachten Vergrößerung der Multiplicatoren σ der Charakter (p', n') unserer Gruppe eine Veränderung nicht erfährt. Dies gilt auch für den Fall, dass wir von Γ erst zu einer Untergruppe haben fortgehen müssen, die von elliptischen Substitutionen frei ist; im letzteren Falle kann man sogleich an den Erzeugenden der ursprünglichen Gruppe die erforderliche Vergrößerung der Multiplicatoren vornehmen.

Wir sind auf diese Weise zu dem folgenden grundlegenden Ergebnisse gelangt: Sehen wir von den Gruppen mit parabolischen Substitutionen ab, so giebt es bei den auf dem Hauptkreise eigentlich discontinuirlichen Gruppen Γ , und zwar bei jedem Charakter (p', n') , stets Gruppen, bei denen die Poincaré'schen Reihen $(-1)^{\text{ter}}$ Dimension absolut und gleichmässig convergent sind. Hat man eine

einzelne Gruppe Γ , bei der dieses gilt, so wird die gleiche Convergenz bei allen denjenigen Gruppen bestehen bleiben, welche durch die eben entwickelte Vergrößerung der Multiplicatoren aus jener entstehen.

Uebrigens soll nochmals hervorgehoben werden, dass die Gruppen mit parabolischen Substitutionen hier keineswegs eine Ausnahmestelle spielen. Vielmehr wird der ausgesprochene Satz auch bei ihnen gültig bleiben. Zum Beweise kann man Gruppen mit parabolischen Erzeugenden in Vergleich stellen mit Gruppen gleicher Charaktere, bei denen die parabolischen Erzeugenden durch elliptische ersetzt erscheinen. Man hat sich bei der Durchführung der Ueberlegung derjenigen Gesichtspunkte zu bedienen, welche Poincaré bei seinen beiden ersten Convergenzuntersuchungen auf die Betrachtung des Modulus der Abbildung der verschiedenen Polygone des Netzes N auf einander gegründet hat. Doch wollen wir der Kürze halber von dieser Entwicklung hier absehen.

§. 4. Von den Multiplicatoren der automorphen Formen der $(-1)^{\text{ten}}$ Dimension.

Um die Poincaré'schen Reihen $(-1)^{\text{ter}}$ Dimension im Falle der Convergenz der genaueren functionentheoretischen Untersuchung zu unterziehen, müssen wir noch etwas eingehender auf die Multiplicatoren der eindeutigen automorphen Formen der Dimension -1 zurückkommen. Wegen der ausführlichen Theorie dieses Gegenstandes sei auf „Vorl.“ II, 64 ff. verwiesen.

Eine vorgelegte eindeutige automorphe Form $\varphi(\xi_1, \xi_2)$ der Dimension -1 nehme gegenüber der Substitution U_k den Factor μ_k an. Offenbar gilt alsdann der folgende Satz: Gehören zu den Substitutionen U_i und U_k von Γ die Multiplicatoren μ_i bzw. μ_k , so gehört zu $U_i U_k$ der Multiplicator $\mu_i \cdot \mu_k$ von $\varphi(\xi_1, \xi_2)$. Hiernach werden die Multiplicatoren von $\varphi(\xi_1, \xi_2)$ bereits für alle Substitutionen von Γ berechnet werden können, wenn man dieselben nur für die Erzeugenden kennt.

Die betrachtete Gruppe Γ möge entstehen durch Composition aus $n = n' - h$ cyklischen elliptischen Gruppen, $h - 1$ cyklischen

hyperbolischen Gruppen und p' Gruppen vom Charakter (2,0). Indem wir die letzteren p' Gruppen nach S. 11 weiter aus je zwei cyklischen hyperbolischen Gruppen componiren, können wir auch sagen, Γ entstehe durch Composition aus $n = n' - h$ cyklischen elliptischen Gruppen und $p = 2p' + h - 1$ cyklischen hyperbolischen Gruppen. Die hierdurch bestimmte Zahl p stellt dann zugleich das Geschlecht des durch Γ bezw. P_0 definirten algebraischen Gebildes dar.

Die n elliptischen Erzeugenden mögen U_1, U_2, \dots, U_n , eine beliebige unter ihnen U_k genannt werden. Die Periode der U_k entsprechenden nicht-homogenen Substitution V_k sei l_k , die Fixpunkte dieser Substitution mögen bei $\xi = \varepsilon_k$ und $\xi = \varepsilon'_k$ gelegen sein, und zwar gehöre der Punkt ε_k der positiven Halbebene an. Wir spalten ε_k und ε'_k in die Quotienten:

$$\varepsilon_k = \varepsilon_k^{(1)} : \varepsilon_k^{(2)}, \quad \varepsilon'_k = \varepsilon_k'^{(1)} : \varepsilon_k'^{(2)}$$

und setzen zur Abkürzung:

$$\xi_1 \varepsilon_k^{(2)} - \xi_2 \varepsilon_k^{(1)} = (\xi, \varepsilon_k), \quad \xi_1 \varepsilon_k'^{(2)} - \xi_2 \varepsilon_k'^{(1)} = (\xi, \varepsilon'_k).$$

Die Substitution U_k soll dann die Gestalt haben:

$$(1) \quad (\xi', \varepsilon_k) = e^{\frac{\pi i}{l_k}} (\xi, \varepsilon_k), \quad (\xi', \varepsilon'_k) = e^{-\frac{\pi i}{l_k}} (\xi, \varepsilon'_k).$$

Für die p hyperbolischen Erzeugenden schreiben wir die Ungleichung $\alpha + \delta > 2$ vor.

Man beachte nun, dass $U_k^{l_k} = -1$ ist, wenn mit -1 symbolisch die Substitution $\xi'_1 = -\xi_1, \xi'_2 = -\xi_2$ bezeichnet wird. Als Form ungerader Dimension wird aber $\varphi(\xi_1, \xi_2)$ gegenüber der Substitution -1 selbst einen Zeichenwechsel erfahren. Der zur elliptischen Substitution U_k gehörende Multiplikator μ_k muss demnach der Gleichung $\mu_k^{l_k} = -1$ genügen und hat also die Gestalt:

$$(2) \quad \mu_k = e^{i\pi \frac{2\nu_k + 1}{l_k}}, \quad (\nu_k = 0, 1, 2, \dots, l_k - 1).$$

Es sind somit bei der einzelnen elliptischen Erzeugenden l_k verschiedene Multiplikatoren zulässig.

Die Multiplikatoren der hyperbolischen Erzeugenden bleiben willkürlich wählbar, nur dass sie, wie schon S. 14

verabredet wurde, für unsere durch Poincaré'sche Reihen darzustellenden Formen Zahlen des absoluten Betrages 1 sein sollen. Man schliesst übrigens die hier vorliegenden Verhältnisse dadurch am besten an die allgemeinen Erörterungen in „Vorl.“ II, 228 an, dass man die p hyperbolischen Erzeugenden als Substitutionen $U_{b_1}, U_{b_2}, \dots, U_{b_p}$ der genannten Entwicklungen ansieht. Indem wir hieran festhalten, werden die a. a. O. erklärten Substitutionen $U_{a_1}, U_{a_2}, \dots, U_{a_p}$ mit 1 identisch, so dass auch die zugehörigen Multiplicatoren $\mu_{a_1}, \mu_{a_2}, \dots, \mu_{a_p}$ gleich 1 zu nehmen sind.

Ausser den angegebenen Relationen $U_k^l = -1$ bestehen keine weiteren Gleichungen zwischen den $n + p$ hier in Betracht kommenden erzeugenden Substitutionen (cf. „Vorl.“ II, 217). Die Folge ist, dass die Multiplicatoren, abgesehen von den genannten Beschränkungen, an keine weiteren Relationen gebunden sind.

Ein zulässiges System von $n + p$ erzeugenden Multiplicatoren μ bezeichnen wir weiterhin als ein zu Γ gehörendes Multiplicatorsystem M . Wir merken noch an, was aus den gegebenen Darlegungen unmittelbar hervorgeht: In Ansehung der elliptischen Multiplicatoren giebt es nur $l_1.l_2\dots l_n$ verschiedene Systeme M . Sobald aber $p > 0$ ist, hat man wegen der hinzukommenden hyperbolischen Multiplicatoren stets unendlich viele Multiplicatorsysteme M .

§. 5. Von den Polen und Nullpunkten der automorphen Formen $(-1)^{\text{ter}}$ Dimension.

Die Ableitung der Eigenschaften der automorphen Formen gründet man zweckmässig auf die Darstellung jener Formen durch eine geeignet gewählte Primform, welche zu dem durch Γ definirten algebraischen Gebilde gehört; und zwar ist zu diesem Ende diejenige Primform besonders brauchbar, welche ich in „Vorl.“ II, 226 als „Ritter'sche Primform“ bezeichnet habe. Es handelt sich, wenn man die Behandlung der automorphen Formen auf diese Primform gründen will, zuvörderst um einen Aufbau der einzelnen Form als Primformproduct, wobei die

Nullpunkte und Pole jener automorphen Form direct zum Ausdruck kommen.

Unter den zahlreichen Folgerungen, welche aus dieser Darstellung der automorphen Formen entspringen, seien zunächst die beiden Sätze genannt: Eine eindeutige automorphe Form ist durch ihre im Fundamentalbereiche P_0 gelegenen Pole und Nullpunkte bis auf eine multiplicative Exponentialfunction eines überall endlichen Integrals eindeutig bestimmt. Eine unimultiplicative automorphe Form ist durch ihre im Fundamentalbereiche gelegenen Pole und Nullpunkte bis auf einen constanten Factor eindeutig bestimmt. Uebrigens ist das im ersten Satze gemeinte Integral erster Gattung im vorliegenden Falle kein ganz beliebiges, sondern muss eine ganzzahlige Combination der $2i\pi W_1^z, \dots, 2i\pi W_p^z$ vorstellen, unter W_1^z, \dots, W_p^z die in „Vorl.“ II, 226 erklärten Normalintegrale erster Gattung verstanden.

Was nun zunächst die Nullpunkte einer automorphen Form der Dimension -1 angeht, so liegen in den elliptischen Ecken des Fundamentalbereiches Nullpunkte „gebrochener“ Ordnungen, welche letztere aus dem Multipliersystem M bestimmbar sind. Für eine einzelne vorgelegte elliptische Ecke fixiren wir in Uebereinstimmung mit (1), S. 21, die zugehörige elliptische Substitution derart, dass ihre Ausübung einem einmaligen Umlaufe im „positiven“ Sinne um die zugehörige Stelle der aus dem Polygon P_0 entspringenden geschlossenen Fläche gleichkommt. Ist l die Periode dieser Substitution, so haben wir den Multiplikator μ einer vorliegenden Form $\varphi(\xi_1, \xi_2)$ der Dimension -1 in der Gestalt $\mu = e^{i\pi \frac{\lambda}{l}}$ anzusetzen, wo λ nach (2), S. 21, eine ungerade ganze Zahl ist. Man kann alsdann zeigen (cf. „Vorl.“ II, 249), dass $\varphi(\xi_1, \xi_2)$ in der fraglichen elliptischen Ecke einen Nullpunkt der Ordnung:

$$\frac{m}{l} = \frac{\lambda - 1}{2l} - E\left[\frac{\lambda - 1}{2l}\right],$$

besitzt, unter $E[a]$ die grösste, den Werth a nicht übertreffende ganze Zahl verstanden.

Um diese Regel auf die $2n$ elliptischen Ecken $\varepsilon_k, \varepsilon'_k$ unseres

Fundamentalebene P_0 anzuwenden, haben wir für die der positiven ξ -Halbebene angehörenden Ecken ε_k die in (2), S. 21, gegebenen Multiplicatoren einzutragen, während zu den Ecken ε'_k alsdann jedesmal μ_k^{-1} gehört. Wir folgern: Eine zum ausgewählten Multiplicatorsysteme M gehörende Form der Dimension -1 hat in den Ecken $\varepsilon_k, \varepsilon'_k$ Nullpunkte der Ordnungen $\frac{v_k}{l_k}$ bzw. $\frac{l_k - v_k - 1}{l_k}$, so dass insbesondere die Summe der Ordnungen dieser $2n$ Nullpunkte durch:

$$\sum_{k=1}^n \frac{v_k}{l_k} + \sum_{k=1}^n \frac{l_k - v_k - 1}{l_k} = \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{l_k}\right)$$

gegeben ist.

Neben diesen in den elliptischen Ecken fest liegenden Nullpunkten hat $\varphi(\xi_1, \xi_2)$ noch eine Reihe weiterer Nullpunkte sowie Pole, welche irgendwo im Polygone P_0 liegen und auch in die schon betrachteten Ecken rücken dürfen. Die Gesamtordnung der Nullpunkte sei t , diejenige der Pole s . Sehen wir einen Pol erster Ordnung als einen Nullpunkt der Ordnung -1 an und schreiben $t - s = m$, so würde bei dieser Auffassung:

$$(1) \quad t - s + \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{l_k}\right) = m + \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{l_k}\right)$$

die Summe der Ordnungen aller Nullpunkte der betrachteten automorphen Form $(-1)^{\text{ter}}$ Dimension im Polygone P_0 sein.

Es ist nun einer der wichtigsten Sätze, die aus der Primformdarstellung der automorphen Formen hervorgehen, dass die Gesamtordnung des Verschwindens, d. h. die Summe aller in P_0 gelegenen Nullpunkte einer automorphen Form der Dimension d gleich ist dem Producte der Dimension d und der Zahl:

$$1 - p - \frac{1}{2} \sum \left(1 - \frac{1}{l_k}\right),$$

wo p das Geschlecht bedeutet, und wo sich die Summe auf alle elliptischen Ecken von P_0 bezieht (cf. „Vorl.“ II, 247). Wenden wir dies Theorem auf den bei uns vorliegenden Fall der Dimension $d = -1$ und des Polygons P_0 mit den $2n$ elliptischen Ecken $\varepsilon_1, \varepsilon'_1, \varepsilon_2, \varepsilon'_2, \dots$ an, so folgt: Für eine Form der Dimension -1

ist der Ueberschuss m der Summe der Ordnungen der „frei beweglichen“ Nullpunkte über diejenige der Pole:

$$(2) \quad m = t - s = p - 1,$$

wo p das Geschlecht von P_0 ist, und wo, wie schon angedeutet, die in den elliptischen Ecken gelegenen Nullpunkte ausser Betracht geblieben sind.

Eine Form mit s Polen oder, wie wir kurz sagen wollen, eine „ s -polige Form“ hat hiernach ausser den in den Ecken festliegenden Nullpunkten insgesamt noch $s + p - 1$ Nullpunkte im Fundamentalbereiche. Für $p \geq 1$ giebt es somit insbesondere stets „ganze“ oder „polfreie“ Formen $(-1)^{\text{ter}}$ Dimension. Eine einzelne solche Form wird $p - 1$ Nullpunkte ausser den wiederholt genannten Nullpunkten in den Polygonecken besitzen. In der That kann man nach „Vorl.“ II, 243 aus der Primform sofort polfreie Formen mit $p - 1$ freien Nullpunkten, sowie mit weiteren vorschriftsmässigen Nullpunkten in den festen Ecken herstellen. Uebrigens ist, wie man sogleich bemerken wolle, keineswegs bewiesen, dass man auch unimultiplicative ganze Formen bilden kann. Würde man die Exponentialfunction eines beliebigen Integrals erster Gattung als Factor zusetzen dürfen, so stände freilich der Bildung unimultiplicativer ganzer Formen nach einem in „Vorl.“ II, 261 bewiesenen Theoreme nichts im Wege. Indessen dürfen wir, wenn wir die Eindeutigkeit der Formen nicht aufgeben wollen, nur Exponentialfunctionen ganzzahliger Combinationen der $2i\pi W_1^z, \dots, 2i\pi W_p^z$ zufügen, wie schon S. 23 hervorgehoben.

Die polfreien Formen $(-1)^{\text{ter}}$ Dimension stehen in naher Beziehung zu den p linear-unabhängigen Formen $\Phi(\xi_1, \xi_2)$, welche durch den Differentiationsprocess (cf. „Vorl.“ II, 253) aus den p Integralen erster Gattung $W(\xi)$ entspringen:

$$\Phi(\xi_1, \xi_2) = \frac{d W(\xi)}{\xi_1 d \xi_2 - \xi_2 d \xi_1} = - \frac{d W(\xi)}{\xi_2^2 d \xi}.$$

Um diese Beziehung auseinanderzusetzen, gehen wir auf den Begriff der „conjugirten“ Formen zurück (cf. „Vorl.“ II, 255). Zwei automorphe Formen heissen conjugirt, wenn sie gegenüber der einzelnen Substitution stets zwei einander reciproke Multipliatoren annehmen, und wenn ausserdem die Summe ihrer Dimen-

sionen gleich -2 ist. Zu Formen $(-1)^{\text{ter}}$ Dimension sind somit stets wieder Formen dieser Dimension conjugirt. Das Product zweier conjugirten ganzen Formen $(-1)^{\text{ter}}$ Dimension ist alsdann stets eine Form $\Phi(\xi_1, \xi_2)$. Da die $2p - 2$ Nullpunkte der letzteren durch $p - 1$ unter ihnen eindeutig bestimmt sind, so kann man die Nullpunkte der einen der beiden Formen $(-1)^{\text{ter}}$ Dimension willkürlich wählen; die Nullpunkte der anderen Form sind alsdann fest bestimmt.

§. 6. Partialbruchzerlegung der Poincaré'schen Reihen $(-1)^{\text{ter}}$ Dimension.

Nach den in den beiden letzten Paragraphen eingeschalteten Zwischenentwickelungen kehren wir zu den Poincaré'schen Reihen $(-1)^{\text{ter}}$ Dimension zurück und denken in:

$$(1) \quad \varphi(\xi_1, \xi_2) = \sum_k \mu_k^{-1} H(\alpha_k \xi_1 + \beta_k \xi_2, \gamma_k \xi_1 + \delta_k \xi_2)$$

eine zum Multiplicatorsystem M gehörende convergente Reihe dieser Art vorgelegt. Mit Benutzung von (1), S. 3, können wir diese Reihe auch kurz so schreiben:

$$(2) \quad \varphi(\xi_1, \xi_2) = \sum_k \mu_k^{-1} H(\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}).$$

Natürlich bezieht sich hier die Summe wieder auf die gesammten Substitutionen von Γ .

Es soll jetzt eine Zerlegung der Reihe (2) in eine Summe von Reihen besprochen werden, deren einzelne eine besonders einfache Bauart besitzt.

Das Product $\xi_2 \cdot H(\xi_1, \xi_2)$, welches wir zu diesem Zwecke betrachten, ist von nullter Dimension und stellt also eine rationale „Function“ von ξ dar. Die letztere wolle man in eine ganze Function von ξ , vermehrt um eine Summe von Partialbrüchen, entwickeln. Wir können alsdann jedes Glied dieser Entwicklung der durch das Symbol \sum_k angedeuteten Summirung unterwerfen,

da auf diese Weise, wie man leicht ausführlicher zeigen wird, lauter einzelne absolut und gleichmässig convergente Reihen entspringen. Der einzelne Partialbruch liefert hierbei eine Reihe:

$$(3) \quad \sum_k \frac{\mu_k^{-1} (\xi_2^{(k)})^{s-1}}{(\xi^{(k)}, \xi)^s},$$

wo s eine ganze Zahl ≥ 1 ist, und wo das auch schon in §. 4 benutzte Klammersymbol (ξ, ξ) die Bedeutung hat:

$$(4) \quad (\xi, \xi) = \xi_1 \xi_2 - \xi_2 \xi_1.$$

Andererseits führt das einzelne Glied der bei der Partialbruchzerlegung auftretenden ganzen Function von ξ auf eine Reihe der Gestalt:

$$(5) \quad \sum_k \mu_k^{-1} \frac{(\xi_1^{(k)})^{s'}}{(\xi_2^{(k)})^{s'+1}},$$

wobei s' ganzzahlig und ≥ 0 ist.

Die Reihen (3) und (5) lassen sich auf verschiedene Arten in einen Ansatz zusammenfassen.

Zunächst kann man die Reihe (5) unter die Gestalt (3) subsummieren, falls man in (3) auch negative ganzzahlige Exponenten $s = -s'$, sowie $s = 0$ zulässt; man hat nur im Speciellen $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 1$ einzutragen. Um ein zusammenfassendes Resultat aussprechen zu können, setzen wir voraus, dass der Punkt $\xi = 0$, den wir soeben in Benutzung nahmen, kein Grenzpunkt der Gruppe ist. Wir können alsdann den Satz formuliren: Eine Poincaré'sche Reihe der Dimension -1 ist darstellbar als lineares Aggregat von Reihen der Gestalt (3), in deren einzelner s eine endliche ganze Zahl bedeutet, während $\xi = \xi_1 : \xi_2$ einen von einem Grenzpunkte des Netzes N verschiedenen Punkt der ξ -Ebene darstellt.

Auch in folgender Art kann man die beiden Reihen (3) und (5) in einen Ansatz zusammenfassen. Man verstehe unter $\eta = \eta_1 : \eta_2$ einen beliebigen Werth, gleichgültig ob derselbe einen Grenzpunkt der Gruppe darstellt oder nicht, während ξ nach wie vor keinen Grenzpunkt von Γ darstellen darf. Man setze alsdann die folgende Reihe an:

$$(6) \quad \sum_k \mu_k^{-1} \frac{(\xi^{(k)}, \eta)^{s-1}}{(\xi^{(k)}, \xi)^s},$$

wo (ξ, η) in gewohnter Weise zur Abkürzung für $\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1$ geschrieben ist, und wo jetzt unter s eine ganze Zahl ≥ 1 verstanden sein soll. Hier gelangen wir offenbar zur Reihe (3) zurück, falls $\eta_1 = -1$, $\eta_2 = 0$ gewählt wird; dagegen entspringt die Reihe (5), wenn $\eta_1 = 0$, $\eta_2 = 1$, $\xi_1 = -1$, $\xi_2 = 0$ gesetzt wird. Man hat das Ergebniss: Nicht nur jeder Ansatz (6)

liefert eine brauchbare Reihe, sondern umgekehrt jede Poincaré'sche Reihe unserer Art lässt sich als ein Aggregat von Reihen der Gestalt (6) darstellen.

Die für $s = 1$ gebildete Reihe (6) möge im Speciellen durch:

$$(7) \quad \psi(\xi_1, \xi_2; \xi_1, \xi_2) = \sum_k \frac{u_k^{-1}}{(\xi^{(k)}, \xi)}$$

bezeichnet werden. Da bei gleichzeitiger Ausübung einer Substitution der Gruppe auf die beiden Variabelnpaare ξ_1, ξ_2 und ξ_1, ξ_2 der Ausdruck (ξ, ξ) invariant ist, so ergibt sich der Satz: $\psi(\xi_1, \xi_2; \xi_1, \xi_2)$ ist nicht nur in den ξ_1, ξ_2 , sondern auch in den ξ_1, ξ_2 eine automorphe Form unserer Gruppe; die Multiplicatorsysteme, welche ψ einmal als Form der ξ_1, ξ_2 , sodann als Form der ξ_1, ξ_2 besitzt, sind einander invers, d. h. je zwei correspondirende Multiplicatoren sind zu einander reciprok.

Die zu $s > 1$ gehörenden Formen (6) entstehen aus ψ durch wiederholte Polarisation. Bezeichnen wir die durch (6) gegebene Form allgemein durch ψ_s , so gilt in der That:

$$-s \cdot \psi_{s+1} = \frac{\partial \psi_s}{\partial \xi_1} \eta_1 + \frac{\partial \psi_s}{\partial \xi_2} \eta_2.$$

Es ergibt sich: ψ_s ist eine automorphe Form der beiden cogredienten Variabelnpaare ξ_1, ξ_2 und η_1, η_2 ; das Multiplicatorsystem ist invers zu demjenigen, welche ψ_s als automorphe Form der ξ_1, ξ_2 besitzt.

Bei den functionentheoretischen Ausführungen, welche jetzt folgen sollen, werden die besonderen Reihen (3), (6) und (7) in den Vordergrund treten.

§. 7. Functionentheoretische Ausführungen, vornehmlich für niedere Werthe von p .

Die soeben unter (7) definirte einpolige Form $\psi(\xi_1, \xi_2; \xi_1, \xi_2)$ bezeichnen wir meist abgekürzt $\psi(\xi, \xi)$. So oft es nöthig erscheint, das Multiplicatorsystem mit anzugeben, möge ausführlicher $\psi_M(\xi, \xi)$ geschrieben werden. Das zu M inverse Multiplicatorsystem soll \bar{M} heissen.

Aus der Invarianz des Ausdruckes (ξ, ξ) bei cogredienten

Variabelpaaren ξ_1, ξ_2 und ξ_1, ξ_2 entspringt der folgende, weiterhin zu verwendende Satz: Beim Austausch der beiden Variabelpaare ξ_1, ξ_2 und ξ_1, ξ_2 zeigt $\psi_M(\zeta, \xi)$ das durch die folgende Gleichung:

$$(1) \quad \psi_M(\xi, \zeta) = - \psi_{\overline{M}}(\zeta, \xi)$$

festgelegte Verhalten.

Für die Fortsetzung der Untersuchung ist nun der S. 25 aufgestellte Satz, dass eine s -polige Form unserer Art ausser den in den etwaigen elliptischen Ecken festliegenden Nullpunkte insgesamt noch $t = s + p - 1$ Nullpunkte im Fundamentalbereiche besitzt, von grundlegender Bedeutung. Wir prüfen die sich hieran anknüpfenden Folgerungen zunächst für niedere Geschlechter μ .

Erstlich gelangt man im Falle des Geschlechtes $p = 0$ zu einem besonders einfachen Resultate. Nehmen wir hier $s = 1$, d. h. ziehen wir die Formen $\psi(\zeta, \xi)$ heran, so ist die einzelne unter ihnen abgesehen von ihrem bei ξ gelegenen Pole und von den in den elliptischen Ecken auftretenden Nullpunkten überall endlich und von null verschieden. Es ergibt sich hieraus: Zwei Formen $\psi(\zeta, \xi)$ und $\psi(\zeta, \xi')$ desselben Multiplicatorsystems, aber mit verschiedenen Werthen ξ , liefern als Quotienten $\psi(\zeta, \xi') : \psi(\zeta, \xi)$ eine Hauptfunction, d. i. eine einwerthige Function des zugehörigen automorphen Gebildes; und zwar liegt der Nullpunkt jener Function bei ξ , der Pol bei ξ' . Den reciproken Werth von $\psi(\zeta, \xi)$ könnte man demnach hier als Primform des Gebildes benutzen; doch würde dieselbe natürlich in den elliptischen Ecken Pole darbieten, deren gebrochene Ordnungen in eindeutiger Weise vom Multiplicatorsysteme abhängen.

Irgend zwei Hauptfunctionen des Gebildes hängen bekanntlich vermöge einer bilinearen Relation zusammen. Es folgt vermöge einer kurzen Zwischenbetrachtung: Zwischen den reciproken Werthen irgend dreier zum gleichen Multiplicatorsystem gehörender Formen $\psi(\zeta, \xi)$, $\psi(\zeta, \xi')$, $\psi(\zeta, \xi'')$ besteht eine lineare Relation:

$$(2) \quad \frac{a}{\psi(\zeta, \xi)} + \frac{a'}{\psi(\zeta, \xi')} + \frac{a''}{\psi(\zeta, \xi'')} = 0$$

mit Coefficienten a, a', a'' , die von ξ_1, ξ_2 unabhängig sind. Die letzteren kann man aus zweien unter den drei Gleichungen:

$$(3) \quad \begin{cases} a' \psi(\xi, \xi'') + a'' \psi(\xi, \xi') = 0, \\ a \psi(\xi', \xi'') + a'' \psi(\xi', \xi) = 0, \\ a \psi(\xi'', \xi') + a' \psi(\xi'', \xi) = 0 \end{cases}$$

bestimmen. Das Verschwinden der Determinante dieses Gleichungssystems liefert mit Rücksicht auf die Gleichung (1) die folgende bemerkenswerthe Relation:

$$\psi_M(\xi, \xi') \psi_M(\xi', \xi'') \psi_M(\xi'', \xi) = \psi_M(\xi, \xi') \psi_{\bar{M}}(\xi', \xi'') \psi_{\bar{M}}(\xi'', \xi).$$

Man kann diese Relation auch direct beweisen, indem man daran anknüpft, dass $\psi_M(\xi, \xi') \cdot \psi_M(\xi'', \xi)$ in den ξ_1, ξ_2 eine eigentlich automorphe, d. h. zum Multiplicatorsystem 1 gehörende Form (-2)^{ter} Dimension ist, die bei ξ' und ξ'' Pole besitzt und ausser in den festen Ecken keine Nullpunkte aufweist.

Uebrigens kann man auch noch auf andere Arten aus den einpoligen Poincaré'schen Reihen Hauptfunctionen gewinnen. So hat z. B. das Product $\psi(\xi, \xi) \cdot \psi(\xi, \xi)$ als Form (-2)^{ter} Dimension der ξ_1, ξ_2 bei ξ einen Pol zweiter Ordnung; und es handelt sich hier um eine eigentlich automorphe Form. Die Nullpunkte von $\psi(\xi, \xi) \cdot \psi(\xi, \xi)$ in den elliptischen Ecken sind solche, dass der Differentialausdruck nullter Dimension:

$$\psi(\xi, \xi) \cdot \psi(\xi, \xi) (\xi_1 d\xi_2 - \xi_2 d\xi_1)$$

ebendort überall endlich und von null verschieden ist. Die Folge ist, dass:

$$\int_{\xi_0}^{\xi} \psi(\xi, \xi) \psi(\xi, \xi) (\xi_1 d\xi_2 - \xi_2 d\xi_1)$$

bei variabel gedachter oberer Grenze ξ eine Hauptfunction darstellt, deren Nullpunkt bei ξ_0 und deren Pol bei ξ liegt. —

Wenden wir uns nunmehr zum Geschlechte $p = 1$, so wird die Gruppe Γ n elliptischen und eine hyperbolische Erzeugende aufweisen, auf welche letztere wir sogleich zurückkommen. Wir werfen hier wieder die Frage auf, wie wir aus den Poincaré'schen Reihen (-1)^{ter} Dimension einfachste, d. h. im vorliegenden Falle zweiwerthige Functionen aufzubauen vermögen.

Allgemein weist jetzt eine s -polige Reihe s freie Nullpunkte

im Fundamentalbereiche auf. Im Producte $\psi(\xi, \xi) \cdot \psi(\xi, \xi)$ der beiden einander conjugirten einpoligen Formen $\psi(\xi, \xi)$ und $\psi(\xi, \xi)$ liegt demnach insbesondere eine eigentlich automorphe Form (-2)^{ter} Dimension vor, welche an der Stelle ξ einen Pol zweiter Ordnung hat und ausser den in den elliptischen Ecken gelegenen Nullstellen noch zwei Nullpunkte aufweist. Nun giebt es nach „Vorl.“ II, 267 für unsere Gruppe des Geschlechtes 1 eine polfreie, nicht identisch verschwindende Reihe (-2)^{ter} Dimension:

$$\Phi(\xi_1, \xi_2) = \sum_k \frac{(\eta, \eta')}{(\xi^{(k)}, \eta)(\xi^{(k)}, \eta')},$$

wo $\eta = \eta_1 : \eta_2$ eine beliebige Stelle des Fundamentalbereiches ist und $\eta' = \eta'_1 : \eta'_2$ durch die soeben genannte hyperbolische Erzeugende aus η hervorgeht. Die Form $\Phi(\xi_1, \xi_2)$ ist eigentlich automorph und hat in den elliptischen Ecken Nullpunkte derselben Ordnungen wie $\psi(\xi, \xi) \cdot \psi(\xi, \xi)$. Es ergibt sich: Im Falle einer Gruppe Γ des Geschlechtes $p = 1$ hat man in:

$$(4) \quad \frac{\sum_k \frac{\mu_k^{-1}}{(\xi^{(k)}, \xi)} \cdot \sum_k \frac{\mu_k^{-1}}{(\xi^{(k)}, \xi)}}{\sum_k \frac{(\eta, \eta')}{(\xi^{(k)}, \eta)(\xi^{(k)}, \eta')}} = \varphi(\xi)$$

eine zweiwertige automorphe Function von ξ , deren beide Pole bei ξ coincidiren und solchergestalt einen Pol zweiter Ordnung liefern.

Polfreie eigentlich automorphe Formen (-2)^{ter} Dimension kann man aber auch ohne Benutzung der Reihen (-2)^{ter} Dimension im directen Anschluss an unsere obigen Reihen $\psi(\xi, \xi)$ bilden. Die betreffende Ueberlegung soll hier gleich für beliebiges Geschlecht $p > 0$ ausgeführt werden. Es sei irgend eine einpolige Reihe $\psi_M(\xi, \xi)$, deren p Nullpunkte sich im Fundamentalbereiche an den Stellen $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(p)}$ finden. Für eine beliebige dieser Stellen, $\xi^{(i)}$, bilde man die zum inversen Multipliersystem gehörende Reihe $\psi_{\bar{M}}(\xi, \xi^{(i)})$ und stelle das Product her:

$$\psi_M(\xi, \xi) \cdot \psi_{\bar{M}}(\xi, \xi^{(i)}).$$

Dieses Product ist in den ξ_1, ξ_2 eine eigentlich automorphe Form (-2)^{ter} Dimension, die entweder einpolig oder ganz ist; denn der Pol $\xi^{(i)}$ des zweiten Factors wird durch den an der gleichen Stelle befindlichen Nullpunkt von $\psi_M(\xi, \xi)$ aufgehoben.

Nun giebt es aber keine einpoligen eigentlich automorphen Formen $(-2)^{\text{ter}}$ Dimension, wie in „Vorl.“ II, 260 bewiesen ist. Es entspringt also der Satz: Verschwindet die einpolige Reihe $\psi_M(\xi, \xi)$ an der Stelle $\xi^{(i)}$, so verschwindet die zum inversen Multiplicatorsysteme \bar{M} gehörende Reihe $\psi_M(\xi, \xi^{(i)})$ an der Stelle ξ , so dass in:

$$(5) \quad \psi_M(\xi, \xi) \psi_M(\xi, \xi^{(i)}) = \Phi^{(i)}(\xi_1, \xi_2)$$

eine ganze und eigentlich automorphe Form $(-2)^{\text{ter}}$ Dimension vorliegt.

Wir schliessen hier auch noch das folgende Theorem an: Der Ansatz (5) liefert von jeder einpoligen Reihe $\psi(\xi, \xi)$ aus p linear unabhängige Formen $\Phi(\xi_1, \xi_2)$. Liegen nämlich die p Stellen $\xi^{(i)}$ sämmtlich getrennt, so liefert Formel (5), für $i = 1, 2, \dots, p$ gebildet, p Formen $\Phi(\xi_1, \xi_2)$, die man leicht als linear unabhängig erkennt. Eine zwischen ihnen bestehende lineare Relation hat nämlich eine Gleichung von der Gestalt:

$$c_1 \psi_{\bar{M}}(\xi, \xi^{(1)}) + c_2 \psi_M(\xi, \xi^{(2)}) + \dots + c_p \psi_{\bar{M}}(\xi, \xi^{(p)}) = 0$$

zur Folge; indessen zeigt man leicht, dass hier alle Coëfficienten c verschwinden müssen. Fallen bei $\xi^{(i)}$ im Ganzen s Nullpunkte von $\psi_M(\xi, \xi)$ zusammen, so hat man die $\psi_{\bar{M}}(\xi, \xi^{(i)})$ durch die entsprechende s -polige Reihe zu ersetzen. Da aber letztere s Parameter linear und homogen enthält, so gelangt man von ihr aus zu s linear unabhängigen Formen $\Phi(\xi_1, \xi_2)$. Insgesamt entspringen wieder p linear unabhängige Formen $\Phi(\xi_1, \xi_2)$.

Wir verfolgen diese Verhältnisse noch ein wenig weiter im Falle $p = 2$ und damit bei einem hyperelliptischen Gebilde. Hier sind die einfachsten algebraischen Functionen zweiwerthig, und zwischen je zwei solchen Functionen besteht eine bilineare Relation. Man kann aber auf folgende Weise von dem oben entwickelten Ansätze aus in der That zu zweiwerthigen Functionen gelangen:

Die beiden Nullstellen $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}$ einer vorgelegten einpoligen Reihe $\psi_M(\xi, \xi)$ mögen der Kürze halber als getrennt liegend angenommen werden. Die beiden correspondirenden Reihen $\psi_{\bar{M}}(\xi, \xi^{(1)})$ und $\psi_M(\xi, \xi^{(2)})$ werden dann den Pol ξ von $\psi_M(\xi, \xi)$ als gemeinsamen Nullpunkt besitzen. Die Folge ist offenbar, dass der Quotient:

$$\varphi(\xi) = \frac{\psi_M(\xi, \xi^{(2)})}{\psi_M(\xi, \xi^{(1)})}$$

eine zweiwerthige eigentlich automorphe Function des Gebildes wird. Einer der beiden Nullpunkte liegt bei $\xi^{(1)}$, ein Pol bei $\xi^{(2)}$; den zweiten Nullpunkt und den zweiten Pol findet man von hier aus durch Ausübung der Transformation der Periode zwei, welche das hyperelliptische Gebilde in sich überführt.

§. 8. Sätze über Darstellung beliebiger Formen (— 1)^{ter} Dimension durch Poincaré'sche Reihen.

Es sollen sich jetzt endlich bei beliebigem Geschlechte p noch ein paar Ausführungen über Darstellung irgend einer Form (— 1)^{ter} Dimension durch eine Poincaré'sche Reihe anschliessen. Möge eine vorgelegte Form $\varphi(\xi_1, \xi_2)$ vom Multipliersystem M im Fundamentalbereiche s -polig sein. Dann kann man durch Heranziehung der Reihenentwickelungen von $\varphi(\xi_1, \xi_2)$ in den Umgebungen der einzelnen im Fundamentalbereiche gelegenen Pole eine rationale Form von der (— 1)^{ten} Dimension $G_{s-1}(\xi_1, \xi_2):G_s(\xi_1, \xi_2)$ bilden, die von $\varphi(\xi_1, \xi_2)$ abgezogen in:

$$\varphi(\xi_1, \xi_2) - \frac{G_{s-1}(\xi_1, \xi_2)}{G_s(\xi_1, \xi_2)}$$

einen im Fundamentalbereiche polfreien Ausdruck liefert. Unter diesen Umständen gewinnt man in:

$$\varphi(\xi_1, \xi_2) - \sum_k \mu_k^{-1} \frac{G_{s-1}(\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)})}{G_s(\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)})}$$

eine ganze automorphe Form der Dimension — 1, so dass wir für die Darstellung der vorgelegten Form den Ansatz gewinnen:

$$(1) \quad \varphi(\xi_1, \xi_2) = \sum_k \mu_k^{-1} \frac{G_{s-1}(\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)})}{G_s(\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)})} + \text{ganze autom. Form.}$$

Wir wollen diesen Ansatz auf alle Formen $\varphi(\xi_1, \xi_2)$ anwenden, welche das gegebene Multipliersystem M haben und deren s Pole fest liegen sollen. Zunächst gelingt es leicht, die Mannigfaltigkeit aller dieser Formen aus der Anzahl $t = s + p - 1$ der Nullpunkte zu bestimmen. Es giebt nach dem Riemann-

Roch'schen Satze $t - p + \tau + 1 = s + \tau$ eigentlich automorphe linear unabhängige Functionen, welche an den t Nullstellen einer einzelnen jener Formen Pole erster Ordnung haben; und zwar bedeutet hierbei τ die Anzahl der linear unabhängigen Form $\Phi(\xi_1, \xi_2)$, welche an den t Nullpunkten zugleich verschwinden. Hieraus ergibt sich leicht, dass sich die gedachten Formen $\varphi(\xi_1, \xi_2)$ aus $s + \tau$ linear-unabhängigen aufbauen lassen.

Auf der anderen Seite bemerke man, dass durch die Lage der Pole von $\varphi(\xi_1, \xi_2)$ nur erst die in:

$$(2) \quad \sum_k u_k^{-1} \frac{G_{s-1}(\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)})}{G_s(\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)})}$$

auftretende Form G_s bestimmt ist, während G_{s-1} noch unbestimmt bleibt. Den s Coefficienten von G_{s-1} entsprechend wird sich der allgemeinste Ausdruck (2) mit gegebenen Polen aus s speciellen Reihen dieser Art linear-homogen zusammensetzen lassen, wobei man diese s speciellen Reihen leicht als linear-unabhängig erkennt.

Wenn nun $\tau = 0$ ist, so stimmt diese Mannigfaltigkeit mit derjenigen der Formen $\varphi(\xi_1, \xi_2)$ überein. Man gewinnt unter diesen Umständen vermöge einer elementaren Ueberlegung: Falls $\tau = 0$ ist, was für $p = 0$ und $p = 1$, sowie bei $p > 1$ für $s \geq p$ stets zutrifft, so wird $\varphi(\xi_1, \xi_2)$ als Poincaré'sche Reihe darstellbar sein. Für das in diesem Falle vorliegende Multiplicatorsystem M können ganze Formen nicht existiren. Da nämlich der Ausdruck (2) für keine Auswahl von G_{s-1} eine polfreie Reihe liefern kann, so würde man beim Auftreten von ganzen Formen aus der rechten Seite von Gleichung (1) mehr als s linear-unabhängige Formen $\varphi(\xi_1, \xi_2)$ herleiten können.

Sobald aber $\tau > 0$ ist, wird die Mannigfaltigkeit der Formen $\varphi(\xi_1, \xi_2)$ diejenige der Reihen (2) übertreffen, so dass nunmehr für das Multiplicatorsystem M ganze Formen existiren. Ohne auf die Frage der Existenz ganzer „unimultiplicativer“ Formen $(-1)^{\text{ter}}$ Dimension ausführlicher zurückzukommen, die wir auch oben (S. 25) unerledigt lassen mussten, wollen wir hier jedenfalls noch den Satz zeigen, dass man polfreie Poincaré'sche Reihen $(-1)^{\text{ter}}$ Dimension auf keine Weise zu bilden im Stande ist.

Wie wir nämlich gesehen haben, lässt sich jede Reihe unserer Art in eine endlichgliedrige Summe von Reihen der Gestalt zerlegen:

$$(3) \quad \sum_k \mu_k^{-1} \frac{G_{s-1}(\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)})}{(\xi^{(k)}, \xi)^s}.$$

Sollen nun bei einer vorgelegten Reihe alle Pole fortfallen, so müssen bei der Zerlegung in eine Summe von Reihen der Gestalt (3) immer mehrere solche Reihen an äquivalenten Stellen ξ in der gleichen Ordnung unendlich werden. Wir wollen daraufhin ein Reihenaggregat:

$$(4) \quad \sum_i \sum_k \mu_k^{-1} \frac{G_{s-1}^{(i)}(\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)})}{(\xi^{(k)}, \xi^{(i)})^s}$$

dieser Art betrachten. Die an der Stelle ξ unendlich werdenden Glieder dieses Ausdruckes liefern folgende Summe:

$$(5) \quad \sum_i \mu_i^{-1} \frac{G_{s-1}^{(i)}(\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)})}{(\xi, \xi)^s},$$

da in der That $(\xi^{(i)}, \xi^{(i)})$ immer gleich (ξ, ξ) ist. Schreiben wir, indem wir die $\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)}$ durch ihre linearen Ausdrücke in ξ_1, ξ_2 ersetzen:

$$\sum_i \mu_i^{-1} G_{s-1}^{(i)}(\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)}) = G_{s-1}(\xi_1, \xi_2),$$

so liefert die Summe (5) in den ξ_1, ξ_2 einen Ausdruck von der Gestalt:

$$\frac{G_{s-1}(\xi_1, \xi_2)}{(\xi, \xi)^s}.$$

Da hier der Zähler nur auf die Dimension $(s - 1)$ ansteigt, so wird dieser Quotient, falls $G_{s-1}(\xi_1, \xi_2)$ nicht identisch verschwindet, sicher bei ξ einen Pol aufweisen. Sollte aber $G_{s-1}(\xi_1, \xi_2)$ mit 0 identisch sein, so würde damit nothwendig auch die Reihe (4) identisch verschwinden. Eine nicht identisch verschwindende Reihe $(-1)^{\text{ter}}$ Dimension kann demnach in der That nie polfrei sein. —

Da bei den Dimensionen $d \leq -2$, sofern die Convergenz der zugehörigen Poincaré'schen Reihen überhaupt besteht, stets auch jede ganze Form (die in den etwaigen parabolischen Spitzen verschwindet) als polfreie Poincaré'sche Reihe dar-

stellbar ist, so erweckt die eben skizzirte Sachlage die Vermuthung, dass bei unseren Gruppen Γ unimultiplicative ganze Formen vielleicht überhaupt nicht existiren möchten. Die nähere Untersuchung dieses Gegenstandes, welche sich auf die Primformdarstellung der ganzen Formen gründen müsste und wesentlich in der Discussion der dabei auftretenden Periodengleichungen zu bestehen hätte, passt indessen nicht mehr in den Rahmen der vorliegenden Abhandlung hinein.

ÜBER EINIGE CURVEN
DIE MIT DER
THEORIE DES EBENEN GELENKVIERECKS
IN ZUSAMMENHANG STEHEN.

VON
R. MÜLLER.

1. Bei der Untersuchung der Veränderungen, die bei einem vorgelegten Kurbelmechanismus hinsichtlich der Gestalt der Koppelcurve eintreten, wenn der beschreibende Punkt in der Koppellebene wandert, erlangen drei bestimmte Curven dieser Ebene eine ausschlaggebende Bedeutung, nämlich die Polcurve p , die Uebergangscurve q — d. i. der Ort der Systempunkte, welche Koppelcurven mit einem Selbstberührungspunkt erzeugen — und der Ort u der Ball'schen Punkte, d. h. derjenigen Systempunkte, deren Bahnen einen Flachpunkt (Undulationspunkt) besitzen. Denn jede Koppelcurve hat im Allgemeinen drei endliche Doppelpunkte; davon geht jedesmal einer in eine Spitze über, falls der beschreibende Punkt auf p liegt, und an Stelle dieser Spitze tritt ein isolirter oder ein Knotenpunkt, wenn der Systempunkt in der nächsten Umgebung des vorigen, aber ausserhalb p auf der einen oder der entgegengesetzten Seite von p gewählt wird. In analoger Weise theilt die Curve q die Koppellebene in zwei Gebiete, so dass den Punkten des einen Koppelcurven mit drei reellen Doppelpunkten, denen des anderen solche mit einem reellen und zwei conjugirt imaginären Doppelpunkten zukommen ¹⁾. Nimmt man endlich in der Nähe von u , aber auf entgegengesetzten Seiten dieser Curve, zwei Systempunkte an, so unterscheiden sich ihre Bahncurven dadurch von einander, dass die eine zwei (reelle) Inflexionspunkte mehr besitzt als die andere ²⁾. Durch die Curven p , q , u wird die Koppellebene in eine Anzahl von Feldern zerlegt, und dann ist klar, dass alle Punkte desselben Feldes Koppelcurven beschreiben, die hinsicht-

¹⁾ Ueber die Doppelpunkte der Koppelcurve, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 1889, S. 303 u. 372, sowie 1891, S. 69. — Ueber die Gestaltung der Koppelcurven für besondere Fälle des Kurbelgetriebes, daselbst 1891, S. 11. — ²⁾ Ueber die angenäherte Geradföhrung mit Hölfe eines ebenen Gelenkvierecks, daselbst 1898, S. 36. — Allievi, Cinematica della biella piana, Napoli 1895, p. 59.

lich ihrer Doppel- und Inflexionspunkte, also überhaupt hinsichtlich ihrer Gestalt, denselben Charakter aufweisen.

Die Curven p und u sind für jeden vorgelegten Kurbelmechanismus leicht zu construiren, indem man die Bewegung umkehrt, also bei festgehaltener Koppellebene für beliebig viele Lagen des ursprünglich festen Gliedes die Pole und die Ball'schen Punkte ermittelt¹⁾. Man erhält sie ferner als die beiden Einhüllenden aller in der Koppellebene liegenden Kreise, die im Verlauf der Bewegung der Reihe nach zu Wendekreisen werden. Bezüglich der Curve p liegen für specielle Fälle des Kurbelmechanismus auch bereits einige analytische Untersuchungen vor²⁾; wir vervollständigen sie im ersten Theile dieser Arbeit, indem wir uns vor Allem mit dem allgemeinen Fall eingehend beschäftigen. Im zweiten Theil wenden wir uns zu der bisher überhaupt noch nicht behandelten Curve u , beschränken uns aber in der Hauptsache auf zwei besonders einfache Fälle des Gelenkvierecks. Dabei wollen wir u zur Abkürzung des Ausdrucks als die Flachpunktcurve der Koppellebene bezeichnen.

Von der Uebergangscurve q kennen wir bisher zwar eine Reihe geometrischer Eigenschaften, doch fehlt es noch an einem Verfahren, um diese Curve, analog wie p und u , ihrer Definition entsprechend punktweise zu construiren. Diese Lücke soll im dritten Theile ausgefüllt werden, indem gezeigt wird, wie man für jede Koppellage die Systempunkte findet, die augenblicklich einen Selbstberührungspunkt ihrer Bahn durchschreiten.

I. Die Polcurve p .

2. In Fig. 1 bedeutet $ABBA$ ein beliebiges Gelenkviereck mit dem festen Glied AB ; die Verlängerungen der Arme AA und BB schneiden sich im Pol \mathfrak{P} der gezeichneten Koppellage AB . Setzen wir $AA = a$, $BB = b$, $AB = c$, $AB = d$, $A\mathfrak{P} = r$, $B\mathfrak{P} = s$, so ergibt sich

¹⁾ Bezüglich der Construction des Ball'schen Punktes vergleiche: Beiträge zur Theorie des ebenen Gelenkvierecks, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 1897, S. 259. — ²⁾ Roberts, On the motion of a plane under certain conditions, Proceedings of the London Mathematical Society III, p. 312; On the pedals of conic sections, daselbst, p. 94.

$$2 \cos \angle A \mathfrak{P} B = \frac{r^2 + s^2 - c^2}{rs} = \frac{(r+a)^2 + (s+b)^2 - d^2}{(r+a)(s+b)},$$

mithin

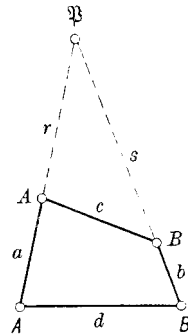
$$(r+a)(s+b)(r^2 + s^2 - c^2) - rs \{(r+a)^2 + (s+b)^2 - d^2\} = 0$$

oder

$$ab(r^2 + s^2 - c^2) - (a^2 + b^2 + c^2 - d^2)rs - as(r^2 - s^2 + c^2) - br(-r^2 + s^2 + c^2) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Die letzte Gleichung gilt für die Pole aller Koppellagen, doch haben wir dabei das Vorzeichen von r oder s in das entgegengesetzte zu verwandeln, wenn in der jeweilig betrachteten Figur der Punkt \mathfrak{P} auf derselben Seite von A oder B liegt, wie der Punkt A bzw. B . Für jeden Punkt der Polcurve p genügen also die Coordinaten r und s entweder der Gleichung (1) oder einer der drei folgenden Gleichungen

Fig. 1.



$$ab(r^2 + s^2 - c^2) + (a^2 + b^2 + c^2 - d^2)rs - as(r^2 - s^2 + c^2) + br(-r^2 + s^2 + c^2) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$ab(r^2 + s^2 - c^2) + (a^2 + b^2 + c^2 - d^2)rs + as(r^2 - s^2 + c^2) - br(-r^2 + s^2 + c^2) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$ab(r^2 + s^2 - c^2) - (a^2 + b^2 + c^2 - d^2)rs + as(r^2 - s^2 + c^2) + br(-r^2 + s^2 + c^2) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Multiplizieren wir (1) mit (4), (2) mit (3) und hierauf diese beiden Producte mit einander, so erhalten wir die Gleichung der Polcurve p in der Form

$$\begin{aligned} & \{a^2 b^2 (r^2 + s^2 - c^2)^2 + (a^2 + b^2 + c^2 - d^2)^2 r^2 s^2 \\ & - a^2 s^2 (r^2 - s^2 + c^2)^2 - b^2 r^2 (-r^2 + s^2 + c^2)^2\}^2 \\ & - 4 a^2 b^2 r^2 s^2 \{(a^2 + b^2 + c^2 - d^2) (r^2 + s^2 - c^2) \\ & + (r^2 - s^2 + c^2) (-r^2 + s^2 + c^2)\}^2 = 0 \quad . \quad . \quad (5) \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} & \{a^2 b^2 (r^2 + s^2 - c^2)^2 - (a^2 + b^2 + c^2 - d^2)^2 r^2 s^2\}^2 \\ & + \{a^2 s^2 (r^2 - s^2 + c^2)^2 - b^2 r^2 (-r^2 + s^2 + c^2)^2\}^2 \\ & - 2 a^2 r^2 \{(a^2 + b^2 + c^2 - d^2) s^2 (r^2 - s^2 + c^2) + b^2 (r^2 + s^2 - c^2) \cdot \\ & \cdot (-r^2 + s^2 + c^2)\}^2 - 2 b^2 s^2 \{(a^2 + b^2 + c^2 - d^2) r^2 (-r^2 + s^2 + c^2) \\ & + a^2 (r^2 + s^2 - c^2) (r^2 - s^2 + c^2)\}^2 = 0 \quad . \quad . \quad (6) \end{aligned}$$

Bezeichnen wir ferner mit x und y die rechtwinkligen Coordinaten von \mathfrak{P} für A als Anfangspunkt, AB als positive x -Achse, so wird $r^2 = x^2 + y^2$, $s^2 = (c - x)^2 + y^2$, $r^2 + s^2 - c^2 = 2(x^2 + y^2 - cx)$, $r^2 - s^2 + c^2 = 2cx$, $-r^2 + s^2 + c^2 = 2c(c - x)$, und wir erkennen sofort, dass p im Allgemeinen eine Curve achter Ordnung ist. Sie ist symmetrisch in Bezug auf die Gerade AB .

Durch Vertauschung von c und d verwandeln sich (5) und (6) in die Gleichung der Polcurve für die umgekehrte Bewegung, d. h. der Polbahn π in der Ebene des festen Gliedes d .

3. Um zunächst die Beziehungen der Polcurve zu den imaginären Kreispunkten zu ermitteln, bestimmen wir ihre Schnittpunkte mit dem Geradenpaar

$$(x - m)^2 + y^2 = 0,$$

setzen also in (6) $r^2 = m(2x - m)$, $s^2 = (m - c)(2x - m - c)$, wobei m vorläufig jeden beliebigen Werth haben kann. Hierdurch ergibt sich eine Gleichung sechsten Grades in x , und zwar bekommt das Glied mit x^6 , welches ausschliesslich vom zweiten Klammersausdruck geliefert wird, den Factor

$$64 c^4 [(a^2 - b^2)m - a^2 c]^2.$$

Dieser verschwindet nur für

$$m = \frac{a^2 c}{a^2 - b^2};$$

dann geht aber der Factor von x^5 über in

$$- 128 a^4 b^4 c^5 \frac{(c^2 - d^2)^2}{(a^2 - b^2)^3},$$

bleibt also im Allgemeinen von Null verschieden. Wir schliessen hieraus, dass die Polcurve die imaginären Kreispunkte im Allgemeinen zu Spitzen hat. Die zugehörigen imaginären Tangenten schneiden sich auf AB in einem reellen Punkte F ,

dem Focalcentrum von p , mit der Abscisse $AF = \frac{a^2 c}{a^2 - b^2}$.

Da $BF = AF - c = \frac{b^2 c}{a^2 - b^2}$ ist, so theilt das Focalcentrum die Koppelstrecke AB aussen im Verhältniss $a^2 : b^2$.

Ebenso ergibt sich aus Fig. 3 für die Existenz des zweiten Asymptotenpaares die nothwendige und hinreichende Bedingung

$$|a - b| > |c - d| \quad (\text{II}).$$

Die Figuren 2 und 3 bestimmen gleichzeitig die Asymptoten der Polbahn π ; die Curven p und π besitzen demnach immer gleich viel Asymptoten.

Diese Realitätsverhältnisse stehen in unmittelbarem Zusammenhang mit der üblichen Eintheilung der Kurbelmechanismen, an die wir zunächst kurz erinnern wollen. Man spricht bekanntlich von einem Doppelkurbel-, Schwingkurbel- oder Doppelschwingmechanismus, je nachdem von beiden Armen a und b , oder nur von einem, oder von keinem Arm volle Umdrehungen in der Ebene des festen Gliedes ausgeführt werden können. Bei einem Doppelschwingmechanismus schwingen entweder beide Arme zwischen je zwei Grenzlagen, die in Bezug auf das feste Glied symmetrisch sind, oder alle Bewegungsvorgänge finden zunächst nur auf einer Seite des festen Gliedes statt, so dass es einer Oeffnung des Gelenkvierecks bedarf, um die Koppel auf die entgegengesetzte Seite zu bringen. Wir unterscheiden diese beiden Fälle bezw. als Doppelschwingmechanismus erster und zweiter Art. Ist ferner bei einem Gelenkviereck die Summe des grössten und kleinsten Gliedes kleiner als die Summe der beiden anderen Glieder, so erhalten wir einen Doppelkurbel-, einen Schwingkurbel- oder einen Doppelschwingmechanismus zweiter Art, je nachdem wir das kleinste Glied, oder eines der beiden ihm benachbarten Glieder, oder das gegenüberliegende Glied feststellen. Ist dagegen die Summe des grössten und kleinsten Gliedes grösser als die Summe der beiden anderen, so entsteht auf alle Fälle ein Doppelschwingmechanismus erster Art. Der singuläre Fall, in welchem die genannten Summen einander gleich sind, möge vorläufig ausgeschlossen bleiben. (Vergl. Art. 7.)

Wir wollen nun zunächst voraussetzen, der bisher betrachtete Kurbelmechanismus sei ein Doppelkurbelmechanismus. Dann ist d das kleinste Glied, also entweder die Koppel c , oder einer der Arme, etwa a , das grösste unter sämtlichen Gliedern. Im ersten Falle ist nach Voraussetzung $c + d < a + b$ und $c - d > |a - b|$; die Bedingungen I und II sind also nicht

erfüllt, d. h. die Curven p und π besitzen überhaupt keine reellen Asymptoten. Zu demselben Ergebniss gelangen wir im zweiten Falle; dann ist nämlich nach Voraussetzung $a + d < b + c$, also $a - b < c - d$ und $c + d < a + b$. Machen wir jetzt das Glied AB fest und AB beweglich, so entsteht ein Doppelschwingmechanismus zweiter Art mit π als Polcurve und p als Polbahn, und wir erhalten somit den Satz: Bei jedem Doppelkurbelmechanismus und bei jedem Doppelschwingmechanismus zweiter Art sind die Asymptoten von Polcurve und Polbahn sämmtlich imaginär. — In analoger Weise ergibt sich: Bei jedem Schwingkurbelmechanismus haben Polcurve und Polbahn vier reelle Asymptoten; dagegen sind im Falle des Doppelschwingmechanismus erster Art immer nur je zwei dieser Asymptoten reell.

5. Die Endpunkte A und B der Koppelstrecke sind Brennpunkte und zugleich vierfache Punkte der Polcurve. Setzen wir nämlich in Gleichung (5) $r^2 = 0$, so folgt

$$(s^2 - b^2)^2 (s^2 - c^2)^4 = 0;$$

von den beiden Geraden $r^2 = 0$, welche die imaginären Kreispunkte mit A verbinden, berührt also jede die Curve p in einem

Fig. 4.

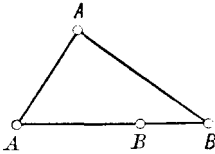
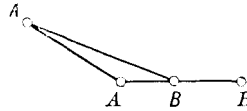


Fig. 5.



Punkte des Kreises $s^2 = b^2$ und hat in A mit p vier zusammenfallende Punkte gemein. Dass p in A einen vierfachen Punkt besitzt, ist auch geometrisch unmittelbar ersichtlich, denn bringen wir das Glied AB in eine solche Lage, dass der Punkt B in die Gerade AB fällt, so ist der zugehörige Pol identisch mit A . Dann ist AB entweder $= c + b$, wie in Fig. 4, oder $= c - b$, wie in Fig. 5, und zu jeder von beiden Lagen des Punktes B gehören zwei in Bezug auf AB symmetrische Lagen des Gliedes AA . Diese sind die vier Tangenten von p im Punkte A .

Damit nun Fig. 4 überhaupt möglich und demnach das eine Tangentenpaar von p reell sei, muss

$$b + c < a + d \quad (\text{III})$$

sein, und für Fig. 5 lautet die analoge Bedingung

$$|b - c| < |a - d| \quad (\text{IV}).$$

Ebenso ist im vierfachen Punkte B das eine Tangentenpaar reell für

$$a + c < b + d \quad (\text{V})$$

und das andere für

$$|a - c| > |b - d| \quad (\text{VI}).$$

Untersuchen wir jetzt die verschiedenen Arten des Kurbelmechanismus hinsichtlich der Realität der betrachteten Tangenten und beginnen wieder mit dem Falle des Doppelkurbelmechanismus, so ist d das kleinste Glied. Ist dann die Koppel c das grösste Glied, mithin $c + d < a + b$, so bestehen zwischen den vier Gliedlängen a, b, c, d jedenfalls die Beziehungen $b + c > a + d$, $c - b < a - d$, $a + c > b + d$ und $c - a < b - d$. Andererseits führt die Annahme, dass einer der Arme, z. B. a , das grösste Glied sei, zu den Ungleichungen $a + d < b + c$, $a - d > |b - c|$, $a + c > b + d$ und $a - c < b - d$; den Bedingungen (III) bis (VI) wird also in beiden Fällen nicht genügt, d. h. die Tangenten der Polcurve p in A und B sind sämtlich imaginär.

Werden dieselben Ueberlegungen auf einen Doppelschwingmechanismus zweiter Art angewendet, so zeigt sich, dass dann die Polcurve in jedem der Koppelendpunkte vier reelle Tangenten hat. Diese Curve ist aber die Polbahn für den Doppelkurbelmechanismus, der durch Umkehrung der Bewegung aus dem zuletzt betrachteten Mechanismus hervorgeht, d. h.: Bei jedem Doppelkurbelmechanismus sind die Tangenten der Polbahn in den Endpunkten des festen Gliedes sämtlich reell.

Im weiteren Verlauf der Untersuchung gelangen wir durch wiederholte Anwendung der bisherigen Schlussweise noch zu folgenden Ergebnissen: Bei jedem Schwingkurbelmechanismus haben Polcurve und Polbahn im Endpunkte des grösseren Armes (der Schwinge) vier reelle, im Endpunkte des kleineren Armes (der Kurbel) vier imaginäre Tangenten. Bei jedem Doppelschwingmechanismus

erster Art besitzen beide Curven in jedem ihrer vierfachen Punkte zwei reelle und zwei conjugirt imaginäre Tangenten.

6. Weitere Doppelpunkte der Polcurve. Aus Gleichung (5) ergibt sich sofort, dass p die Schnittpunkte der Curven

$$a^2 b^2 (r^2 + s^2 - c^2)^2 + (a^2 + b^2 + c^2 - d^2)^2 r^2 s^2 \\ - a^2 s^2 (r^2 - s^2 + c^2)^2 - b^2 r^2 (-r^2 + s^2 + c^2)^2 = 0$$

und

$$(a^2 + b^2 + c^2 - d^2)(r^2 + s^2 - c^2) + (r^2 - s^2 + c^2)(-r^2 + s^2 + c^2) = 0$$

zu Doppelpunkten hat. Wir bedienen uns nun wieder rechtwinkliger Coordinaten mit A als Anfangspunkt, AB als x -Achse, schreiben also die beiden letzten Gleichungen in der Form

$$4 a^2 b^2 (x^2 + y^2 - cx)^2 + (a^2 + b^2 + c^2 - d^2)^2 (x^2 + y^2) \{ (c - x)^2 + y^2 \} \\ - 4 a^2 c^2 x^2 \{ (c - x)^2 + y^2 \} - 4 b^2 c^2 (c - x)^2 (x^2 + y^2) = 0 \quad (7)$$

und

$$(a^2 + b^2 + c^2 - d^2)(x^2 + y^2 - cx) + 2c^2 x(c - x) = 0 \quad (8).$$

Gleichung (7) stellt eine circulare Curve vierter Ordnung dar mit Doppelpunkten in A und B , (8) einen Kegelschnitt mit der Hauptachse AB ; beide Curven schneiden sich also ausser in A und B noch in zwei Punktpaaren C_1, D_1 und C_2, D_2 , deren jedes in Bezug auf AB symmetrisch ist. Setzen wir zur Abkürzung

$$a^2 + b^2 + c^2 - d^2 = n^2,$$

so folgt aus (8)

$$n^2 (x^2 + y^2 - cx) = -2c^2 x(c - x),$$

$$n^2 (x^2 + y^2) = -cx \{ 2c(c - x) - n^2 \},$$

$$n^2 \{ (c - x)^2 + y^2 \} = -c(c - x)(2cx - n^2);$$

demnach geht Gleichung (7), unter Weglassung des Factors $c^2 x(c - x)$, über in

$$16 a^2 b^2 c^2 x(c - x) + n^4 \{ 2c(c - x) - n^2 \} (2cx - n^2) \\ + 4 a^2 c n^2 x(2cx - n^2) + 4 b^2 c n^2 (c - x) \{ 2c(c - x) - n^2 \} = 0$$

oder

$$\{ 2c(n^2 - 2a^2)x + n^2(n^2 - 2c^2) \} \\ \cdot \{ 2c(n^2 - 2b^2)(c - x) + n^2(n^2 - 2c^2) \} = 0.$$

Hieraus ergibt sich für die Doppelpunkte C_1 und D_1 der Polcurve

$$x_1 = -\frac{n^2(n^2 - 2c^2)}{2c(n^2 - 2a^2)} = \frac{(a^2 + b^2 + c^2 - d^2)(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)}{2c(a^2 - b^2 - c^2 + d^2)}$$

und für die Doppelpunkte C_2 und D_2

$$\begin{aligned} c - x_2 &= -\frac{n^2(n^2 - 2c^2)}{2c(n^2 - 2b^2)} \\ &= \frac{(a^2 + b^2 + c^2 - d^2)(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)}{2c(-a^2 + b^2 - c^2 + d^2)}. \end{aligned}$$

Damit sind aber noch nicht alle Doppelpunkte von p ermittelt. Multipliciren wir nämlich in Artikel 2 zunächst Gleichung (1) mit (2) und (3) mit (4), so finden wir die Gleichung von p in der Form

$$\begin{aligned} &\{a^2 b^2 (r^2 + s^2 - c^2)^2 - n^4 r^2 s^2 + a^2 s^2 (r^2 - s^2 + c^2)^2 \\ &- b^2 r^2 (-r^2 + s^2 + c^2)^2 - 4 b^2 s^2 \{n^2 r^2 (-r^2 + s^2 + c^2) \\ &+ a^2 (r^2 + s^2 - c^2)(r^2 - s^2 + c^2)\}^2 = 0, \end{aligned}$$

und hiernach sind Doppelpunkte von p auch die Schnittpunkte der Curven

$$\begin{aligned} &a^2 b^2 (r^2 + s^2 - c^2)^2 - n^4 r^2 s^2 + a^2 s^2 (r^2 - s^2 + c^2)^2 \\ &- b^2 r^2 (-r^2 + s^2 + c^2)^2 = 0 \end{aligned}$$

und

$$n^2 r^2 (-r^2 + s^2 + c^2) + a^2 (r^2 + s^2 - c^2) (r^2 - s^2 + c^2) = 0$$

oder

$$\begin{aligned} &4 a^2 b^2 (x^2 + y^2 - c x)^2 - n^4 (x^2 + y^2) \{(c - x)^2 + y^2\} \\ &+ 4 a^2 c^2 x^2 \{(c - x)^2 + y^2\} - 4 b^2 c^2 (c - x)^2 (x^2 + y^2) = 0 \end{aligned}$$

und

$$n^2 (c - x)(x^2 + y^2) + 2 a^2 x (x^2 + y^2 - c x) = 0.$$

Die erste dieser Gleichungen repräsentirt eine circulare Curve vierter Ordnung mit Doppelpunkten in A und B , die zweite eine circulare Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte in A und einem einfachen Punkte in B ; wir erhalten demnach von A , B und den imaginären Kreispunkten abgesehen wieder vier Schnittpunkte, die in Bezug auf AB paarweise symmetrisch liegen. Die Elimination von $x^2 + y^2$ liefert nach einfacher Rechnung für die Abscissen dieser Schnittpunkte die Gleichung

$$\begin{aligned} &\{2c(n^2 - 2a^2)x + n^2(n^2 - 2c^2)\} \\ &\cdot \{2(n^2 - a^2 - b^2)x - c(n^2 - 2b^2)\} = 0. \end{aligned}$$

Der erste Factor giebt gleich Null gesetzt wieder den Werth

$x = x_1$ und damit die bereits bekannten Doppelpunkte C_1 und D_1 ; dagegen entspricht dem zweiten Factor ein neues Paar von Doppelpunkten C_3, D_3 mit der Abscisse

$$x_3 = \frac{c(n^2 - 2b^2)}{2(n^2 - a^2 - b^2)} = \frac{c(a^2 - b^2 + c^2 - d^2)}{2(c^2 - d^2)}.$$

Da jeder der vierfachen Punkte A und B für sechs Doppelpunkte zählt, so haben wir mit Einschluss der imaginären Kreispunkte bis jetzt im Ganzen 20 Doppelpunkte der Polcurve ermittelt. Nun besitzt eine Curve achter Ordnung nie mehr als 21 Doppelpunkte; diese Anzahl kann aber bei der Curve p nicht erreicht werden, weil p in Bezug auf AB symmetrisch ist. Wir kennen also bereits sämtliche Doppelpunkte von p und gelangen somit zu dem Satz: Die Polcurve hat ausser den imaginären Kreispunkten und den vierfachen Punkten A und B im Allgemeinen noch sechs (reelle oder imaginäre) Doppelpunkte, die in Bezug auf AB symmetrisch liegen. Sie ist also vom Geschlecht eins.

Fig. 6 zeigt die Polcurve p für den in Fig. 1 bis 5 dargestellten Schwingkurbelmechanismus.

Specielle Fälle. I. Ist $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$, d. h. stehen die Diagonalen des Gelenkvierecks $ABBA$ für jede Koppellage auf einander senkrecht, so wird $x_1 = 0$, $x_2 = c$ und $y_1 = y_2 = 0$; die Punktpaare C_1, D_1 und C_2, D_2 fallen also bezw. zusammen mit A und B . In diesem Falle sind die durch Fig. 4 und 5 bestimmten Tangenten von p mit einander identisch; die Polcurve hat folglich in A und B je zweimal einen Selbstberührungspunkt.

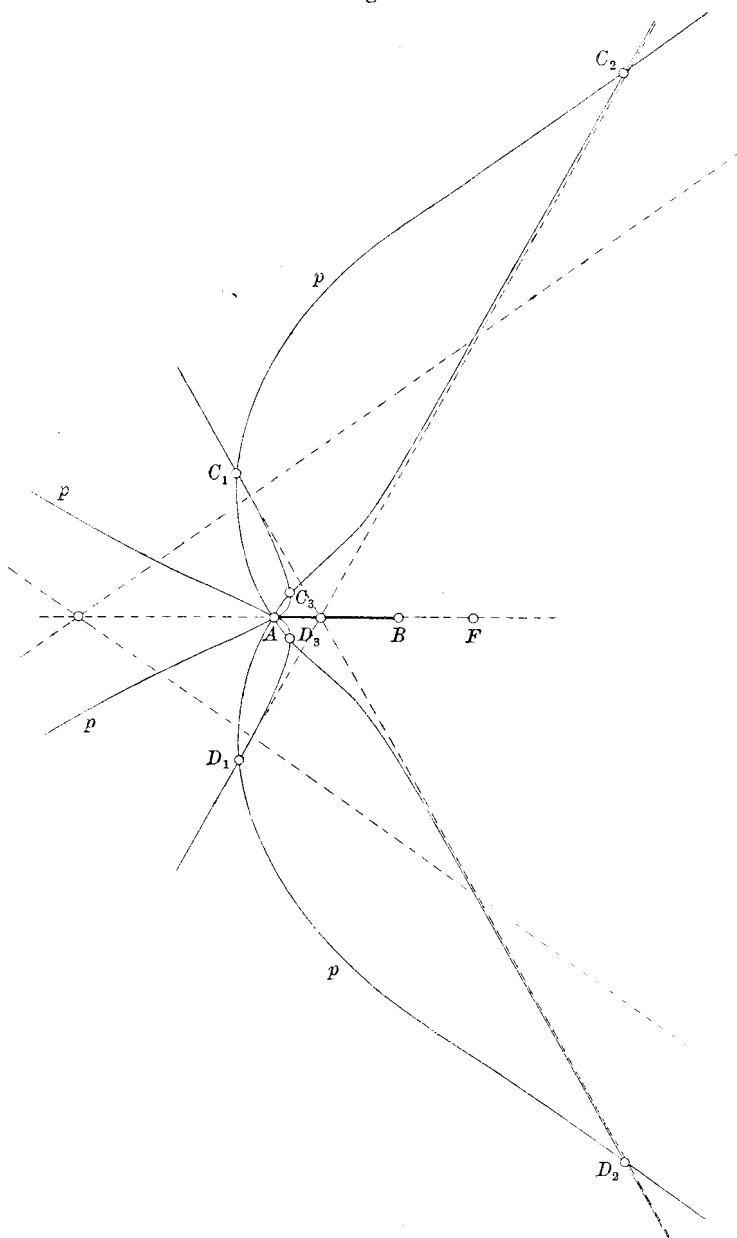
II. Für $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ ist gleichfalls $x_1 = 0$, $x_2 = c$, aber $y_1 = \pm \frac{c^2}{a}$, $y_2 = \pm \frac{c^2}{b}$.

III. Ist $a^2 + d^2 = b^2 + c^2$, so wird $x_1 = \infty$, $y_1 = \infty$ und $x_3 = c$, $y_3 = 0$. Die Polcurve hat also ausser den imaginären Kreispunkten nicht mehr vier verschiedene unendlich ferne Punkte, sondern zwei unendlich ferne Doppelpunkte C_1, D_1 , und die durch Fig. 2 und 3 bestimmten Asymptotenrichtungen fallen zusammen. Ueberdies vereinigen sich die Doppelpunkte C_3 und D_3 mit dem vierfachen Punkte B , so dass p an dieser Stelle (nicht aber in A) zweimal einen Selbstberührungspunkt besitzt. — Das Analoge gilt im Falle $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$.

IV. Für $c = d$ wird $x_3 = \infty$, und die Doppelpunkte C_3, D_3 fallen mit den imaginären Kreispunkten zusammen, die dadurch den Charakter von Selbstberührungspunkten annehmen. (Vergl. die Bemerkung am Schlusse des Art. 3.)

V. Soll $x_1 = x_2$ sein, so ergibt sich durch Einsetzen der für x_1 und

Fig. 6.



$c - x_2$ gefundenen Werthe in die Gleichung $x_1 + (c - x_2) = c$ sofort die Bedingung

$$-n^2(n^2 - 2c^2)(n^2 - a^2 - b^2) = c^2(n^2 - 2a^2)(n^2 - 2b^2)$$

oder

$$-n^6 + n^4(a^2 + b^2 + c^2) - 4a^2b^2c^2 = 0$$

oder

$$d^2(a^2 + b^2 + c^2 - d^2)^2 - 4a^2b^2c^2 = 0.$$

Dann ist aber auch $x_1 = x_3$, d. h. die drei Paare von Doppelpunkten $C_1, D_1; C_2, D_2; C_3, D_3$ vereinigen sich zu einem Paar dreifacher Punkte C, D der Curve p . Aus der letzten Gleichung folgt

$$\pm \frac{c}{d} = -\frac{a}{d} \cdot \frac{b}{d} \pm \sqrt{\left(1 - \frac{a^2}{d^2}\right)\left(1 - \frac{b^2}{d^2}\right)},$$

oder, wenn $\frac{a}{d} = \cos \alpha$, $\frac{b}{d} = \cos \beta$, $\frac{c}{d} = \cos \gamma$ gesetzt wird,

$$\pm \cos \gamma = -(\cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta) = -\cos(\alpha \pm \beta).$$

Verstehen wir also unter α, β, γ irgend drei Winkel, deren Summe 180° beträgt, und unter d eine beliebige Strecke, und bilden wir das Gelenkviereck $ABBA$ aus den Seiten $a = d \cos \alpha$, $b = d \cos \beta$, $c = d \cos \gamma$ und d , so hat die zugehörige Polcurve p zwei dreifache Punkte C und D ; jeder von beiden beschreibt also eine Koppelcurve mit drei Spitzen. — Berechnen wir für den Punkt C aus Gleichung (8) die Werthe von r und s , so finden wir leicht

$$r = c \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}, \quad s = c \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}.$$

Wir erhalten demnach C , indem wir die Winkel α und β bezw. in B und A an die Koppelstrecke antragen¹⁾.

7. Ausartungen der Polcurve in speciellen Fällen des Kurbelmechanismus. Wir beginnen mit der Betrachtung des durchschlagenden Kurbelmechanismus, setzen also voraus, im Gelenkviereck $ABBA$ sei die Summe zweier Glieder gleich der Summe der beiden anderen Glieder. Dabei haben wir zu unterscheiden, ob die einander gleichen Summen von je zwei gegenüberliegenden oder von je zwei benachbarten Gliedern gebildet werden.

I. Ist $a + b = c + d$, also $a^2 + b^2 + c^2 - d^2 = 2(-ab + ac + bc)$, so gehen die Gleichungen (1) bis (4) über in

$$(r + s + c) \{ (br^2 + as^2 - abc) - (a + b)rs + b(a - c)r + a(b - c)s \} = 0$$

¹⁾ In anderer Weise von Cayley gefunden. On three-bar motion, Proceedings of the London Mathematical Society VII, p. 141.

$$(-r + s + c) \{ (br^2 + as^2 - abc) + (a + b)rs - b(a - c)r + a(b - c)s \} = 0$$

$$(r - s + c) \{ br^2 + as^2 - abc + (a + b)rs + b(a - c)r - a(b - c)s \} = 0$$

$$(-r - s + c) \{ (br^2 + as^2 - abc) - (a + b)rs - b(a - c)r - a(b - c)s \} = 0.$$

Bilden wir nun wieder die Gleichung der Polcurve durch Multiplication dieser vier Gleichungen, so wird das Product

$$(r + s + c)(-r + s + c)(r - s + c)(-r - s + c) \\ = (r^2 - s^2)^2 - 2c^2(r^2 + s^2) + c^4 = -4c^2y^2;$$

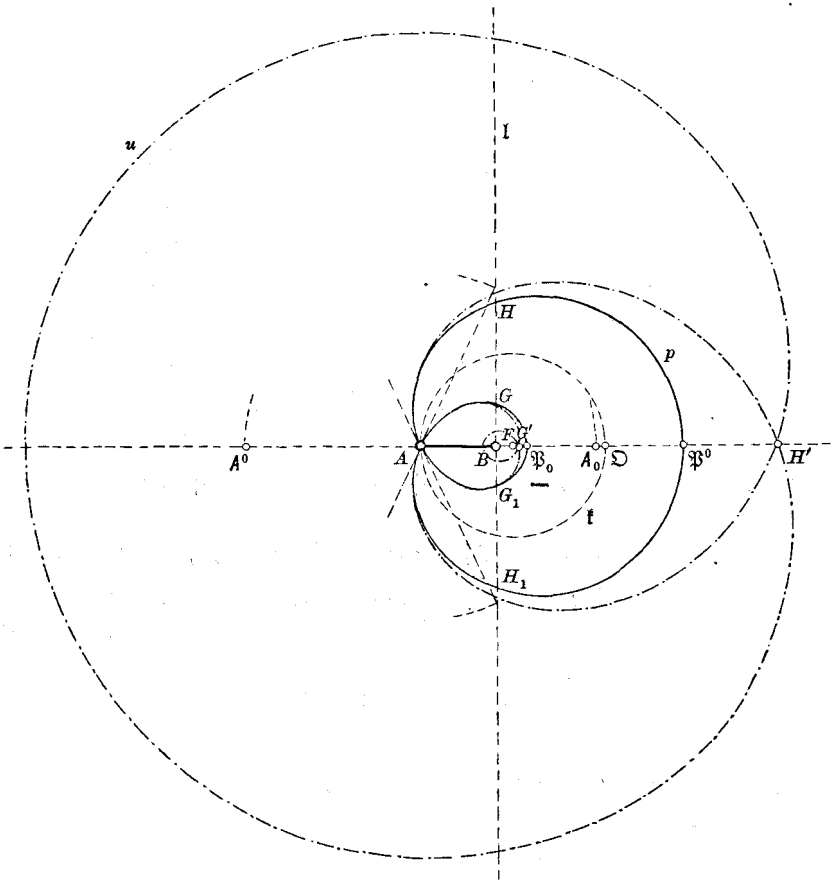
die Polcurve zerfällt also in die doppelt zählende Gerade AB und eine Curve sechster Ordnung p . Diese hat wiederum Spitzen in den imaginären Kreispunkten und ausserdem zwei unendlich ferne Punkte, die durch Fig. 3 bestimmt sind. Die Punkte A und B sind Doppelpunkte von p ; die zugehörigen Tangenten liefert Fig. 4. Ueberdies schneidet p die Gerade AB noch in zwei Punkten, den beiden Polen der Durchschlagslage des Gelenkvierecks¹⁾. Da die Curve p ausser A und B und den imaginären Kreispunkten noch die sechs mit C_1 bis D_3 bezeichneten Doppelpunkte besitzt, so ist sie vom Geschlecht Null. Nun ist bekanntlich die Koppelcurve, die irgend ein Punkt der Koppellebene beschreibt, eine tricirculare Curve sechster Ordnung, die im Allgemeinen drei, im gegenwärtig vorliegenden Sonderfalle aber vier Doppelpunkte hat, also bezw. vom Geschlecht Eins oder Null. Hieraus ergibt sich, dass die Polcurve p in beiden Fällen von gleichem Geschlecht ist, wie die Koppelcurven, die zu dem jeweilig betrachteten Kurbelmechanismus gehören.

II. Sei ferner die Summe zweier benachbarten Glieder gleich der Summe der beiden anderen Glieder, z. B. $a + d = b + c$. Dann wird der Ausdruck $a^2 + b^2 + c^2 - d^2 = 2(ab + ac - bc)$, und dieser Werth geht aus dem unter I. gefundenen hervor durch Vertauschung von b mit $-b$. Nun enthält die Gleichung (5) der Polcurve die Gliedlänge d nur in der Verbindung $a^2 + b^2 + c^2 - d^2$ und im Uebrigen nur gerade Potenzen von b ; wir

¹⁾ Vergl. Burmester, Kinematik I, S. 113, sowie Fig. 334.

erhalten daher p , indem wir über $A\mathfrak{D}$ als Durchmesser den Kreis \mathfrak{f} beschreiben und auf den durch A gehenden Strahlen von ihren Schnittpunkten mit \mathfrak{f} aus die Strecke $\mathfrak{D}\mathfrak{P}_0$ beiderseits abtragen. — Der Punkt A ist ein Doppelpunkt von p . Wie sich

Fig. 8.



aus Fig. 4 ergibt, gehen seine Tangenten durch die Schnittpunkte des um A mit dem Radius a beschriebenen Kreises und der Geraden l , die in B auf AB senkrecht steht. Die imaginären Kreispunkte sind wiederum Spitzen von p ; die zugehörigen Tangenten schneiden sich im Mittelpunkte F von \mathfrak{f} , denn dieser theilt AB im Verhältniss $a^2:b^2$ (Art. 3). Die Curve p ist hier-

nach von der vierten Classe. Durch jeden der imaginären Kreispunkte geht folglich nur noch je eine Tangente, und diese Tangenten treffen sich in B . Für $s^2 = 0$ folgt nämlich aus Gleichung (9)

$$(r^2 - a^2)^2 = 0,$$

d. h. die Geraden $s^2 = 0$ sind Tangenten von p (Art. 5).

9. Ist $a = b$ und $c = d$, so geht Gleichung (1) über in

$$a(r - s + c)(r - s - c)(r + s + a) = 0;$$

die Polcurve zerfällt also in die vierfach zählende Gerade AB , die doppelt zählende unendlich ferne Gerade und die Curve

$$(r + s + a)(r - s + a)(-r + s + a)(-r - s + a) = 0, \quad (11)$$

d. h. einen Kegelschnitt p , der A und B zu Brennpunkten und die Gliedlänge a zur Hauptachse hat. Das Gelenkviereck $ABBA$ liefert gegenwärtig einen Parallelkurbelmechanismus, der in einer der beiden Durchschlagslagen in einen Zwillingskurbelmechanismus übergehen kann. Im ersten Fall ist die Polcurve die unendlich ferne Gerade, und jeder Koppelpunkt bewegt sich auf einem Kreise vom Radius a ; im zweiten Fall ergibt sich als Polcurve der Kegelschnitt p , und die einzelnen Punkte der Koppellebene beschreiben Curven vierter Ordnung¹⁾.

10. Zu weiteren Sonderfällen gelangen wir durch die Annahme, in dem betrachteten Gelenkviereck seien zwei benachbarte Glieder, z. B. b und d , unendlich gross. Diese Sonderfälle sind zuerst von Roberts behandelt worden²⁾, und wir erhalten die betreffenden Resultate ohne Weiteres aus den vorstehend entwickelten allgemeinen Formeln der Artikel 2 bis 6, indem wir dort $b = \infty$, $d = \infty$ und $d - b$ gleich irgend einer endlichen Länge setzen.

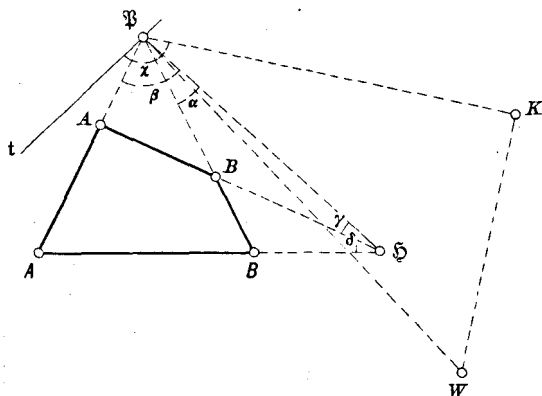
II. Die Flachpunktcurve u .

11. Wir verstehen wie bisher unter $ABBA$ einen beliebigen Kurbelmechanismus mit den Gliedlängen $AA = a$, $BB = b$, $AB = c$, $AB = d$ (Fig. 9). Für die augenblicklich betrachtete

¹⁾ Burmester, Kinematik I, S. 302. — ²⁾ A. a. O., S. 312 und 314. Vergl. auch „über die Gestaltung der Koppelcurven etc.“, a. a. O., S. 15.

Koppellage AB , die AB in \mathfrak{H} schneidet, sei \mathfrak{P} der Pol. t die gemeinsame Tangente von Polbahn und Polcurve, W der Wendepol und K der Ball'sche Punkt, also $\angle t\mathfrak{P}A = \angle B\mathfrak{P}\mathfrak{H}$,

Fig. 9



$\mathfrak{P}W \perp t$ und $WK \perp \mathfrak{P}K$. Wir setzen weiter $\mathfrak{P}\mathfrak{H} = h$, $\angle B\mathfrak{P}\mathfrak{H} = \alpha$, $\angle A\mathfrak{P}\mathfrak{H} = \beta$, $\angle \mathfrak{P}\mathfrak{H}A = \gamma$, $\angle \mathfrak{P}\mathfrak{H}K = \delta$, $\angle t\mathfrak{P}K = \chi$; dann dienen zur Bestimmung der Punkte W und K die an anderer Stelle¹⁾ abgeleiteten Gleichungen

$$\mathfrak{P}W = h \frac{\sin \gamma \sin \delta}{\sin \alpha \sin \beta \sin (\delta - \gamma)} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (12)$$

$$\tan \chi = - \frac{\tan \alpha \tan \beta}{\tan \delta} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (13)$$

Bezeichnen wir wieder die Strecken $A\mathfrak{P}$ und $B\mathfrak{P}$ bezw. mit r und s und ferner AK mit r' , BK mit s' , so folgt aus dem Dreieck $A\mathfrak{P}K$

$$r'^2 = r^2 + \mathfrak{P}K^2 - 2r \cdot \mathfrak{P}K \cos (\chi - \alpha).$$

Nun ist

$$r = h \frac{\sin \gamma}{\sin (\beta + \gamma)}$$

und $\mathfrak{P}K = \mathfrak{P}W \sin \chi$; schreiben wir also zur Abkürzung $\tan \alpha = \kappa$, $\tan \beta = \lambda$, $\tan \gamma = \mu$, $\tan \delta = \nu$, so finden wir mit Rücksicht auf (12) und (13) nach einfacher Rechnung

¹⁾ Beiträge zur Theorie des ebenen Gelenkvierecks, a. a. O., S. 258 und 259.

$$r'^2 = h^2 \frac{\mu^2 (1 + \lambda^2) (\lambda + v)^2 (\kappa^2 \mu^2 + v^2)}{(\lambda + \mu)^2 (\mu - v)^2 (\kappa^2 \lambda^2 + v^2)} \quad (14)$$

und analog

$$s'^2 = h^2 \frac{\mu^2 (1 + \kappa^2) (\kappa + v)^2 (\lambda^2 \mu^2 + v^2)}{(\kappa + \mu)^2 (\mu - v)^2 (\kappa^2 \lambda^2 + v^2)} \quad (15)$$

Aus der Figur ergibt sich weiter

$$\begin{aligned} a &= h \frac{\sin \beta \sin (\delta - \gamma)}{\sin (\beta + \gamma) \sin (\beta + \delta)} & b &= h \frac{\sin \alpha \sin (\delta - \gamma)}{\sin (\alpha + \gamma) \sin (\alpha + \delta)} \\ c &= h \frac{\sin \gamma \sin (\beta - \alpha)}{\sin (\alpha + \gamma) \sin (\beta + \gamma)} & d &= h \frac{\sin \delta \sin (\beta - \alpha)}{\sin (\alpha + \delta) \sin (\beta + \delta)}, \end{aligned}$$

es ist also

$$\begin{aligned} a^2 &= h^2 \frac{\lambda^2 (1 + \lambda^2) (\mu - v)^2}{(\lambda + \mu)^2 (\lambda + v)^2} & b^2 &= h^2 \frac{\kappa^2 (1 + \kappa^2) (\mu - v)^2}{(\kappa + \mu)^2 (\kappa + v)^2} \\ c^2 &= h^2 \frac{\mu^2 (1 + \mu^2) (\kappa - \lambda)^2}{(\kappa + \mu)^2 (\lambda + \mu)^2} & d^2 &= h^2 \frac{v^2 (1 + v^2) (\kappa - \lambda)^2}{(\kappa + v)^2 (\lambda + v)^2} \end{aligned} \quad (16)$$

Die Elimination von $h, \kappa, \lambda, \mu, v$ zwischen (14), (15) und den vier Gleichungen (16) würde zu einer Gleichung zwischen a, b, c, d, r' und s' führen, die für die Ball'schen Punkte aller Koppellagen gilt, d. h. zur Gleichung der Flachpunktcurve u der Koppelebene. Wesentlich einfacher gestaltet sich aber die Ableitung dieser Gleichung bei dem speciellen Kurbelmechanismus, zu dem wir nunmehr übergehen.

12. Der Zwillingsskurbelmechanismus. In Fig. 10 ist $ABBA$ ein Antiparallelogramm, also $AA = BB = a$, $AB = AB = c$. Unter Beibehaltung der früher eingeführten Bezeichnungen wird \mathfrak{P} identisch mit $\mathfrak{P}\mathfrak{H}$ und $\beta = -\alpha$, $\gamma = -\delta$; die Gleichungen (12) und (13) gehen daher über in

$$\mathfrak{P} W = \frac{h \tan \delta}{2 \sin^2 \alpha}$$

und

$$\tan \chi = \frac{\tan^2 \alpha}{\tan \delta}.$$

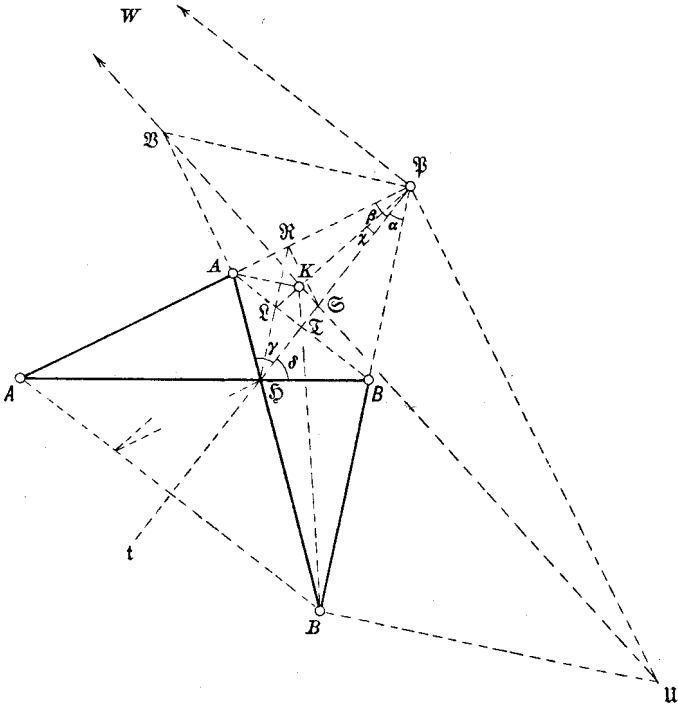
Verstehen wir also unter \mathfrak{S} den Schnittpunkt von WK mit $\mathfrak{P}\mathfrak{H}$, so folgt

$$\mathfrak{P} \mathfrak{S} = \mathfrak{P} W \tan \chi = \frac{h}{2 \cos^2 \alpha}.$$

Hieraus ergibt sich für die Construction des Ball'schen Punktes K die einfache Regel: Man ziehe durch \mathfrak{H} zu BB eine Parallele, die AB in \mathfrak{Q} , AA in \mathfrak{R} schneidet, errichte in \mathfrak{R} zu AA ein Loth und bestimme seinen Schnittpunkt \mathfrak{S} mit $\mathfrak{P}\mathfrak{H}$; dann ist K der Fusspunkt des Lothes von \mathfrak{S} auf $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$. Bedeutet nämlich \mathfrak{I} den Schnittpunkt von $\mathfrak{P}\mathfrak{H}$ und AB , so ist

$$\tan \angle \mathfrak{Q}\mathfrak{P}\mathfrak{H} = \frac{\mathfrak{I}\mathfrak{Q}}{\mathfrak{P}\mathfrak{I}} = \frac{\mathfrak{H}\mathfrak{I}}{\mathfrak{P}\mathfrak{I}} \tan \alpha = \frac{A\mathfrak{I} \cot \delta}{A\mathfrak{I} \cot \alpha} \tan \alpha = \frac{\tan^2 \alpha}{\tan \delta},$$

Fig. 10.



also $\angle \mathfrak{Q}\mathfrak{P}\mathfrak{H} = \chi$. — Die Gerade $\mathfrak{P}K$ geht auch durch den Schnittpunkt von BA mit der Parallelen durch \mathfrak{H} zu AA .

Aus den Kreisvierecken $A\mathfrak{R}\mathfrak{S}\mathfrak{I}$ und $\mathfrak{Q}K\mathfrak{S}\mathfrak{I}$ folgt

$$\mathfrak{P}A.\mathfrak{P}\mathfrak{R} = \mathfrak{P}\mathfrak{I}.\mathfrak{P}\mathfrak{S} = \mathfrak{P}\mathfrak{Q}.\mathfrak{P}K;$$

mithin ist auch $A\mathfrak{R}K\mathfrak{Q}$ ein Kreisviereck, also $\angle KA\mathfrak{P} = \angle K\mathfrak{Q}\mathfrak{R} = \angle K\mathfrak{P}B$. Ebenso zeigt man, dass $\angle \mathfrak{P}BK = \angle A\mathfrak{P}K$ ist; demnach ist auch $\angle AK\mathfrak{Q} = \angle \mathfrak{Q}KB = \angle A\mathfrak{P}B$.

d. h. die Normale der Bahncurve des Punktes K halbt den Winkel AKB . Hieraus folgt eine zweite Construction des Punktes K : Man ziehe $A\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}\mathfrak{U} \perp \mathfrak{B}A$, sowie $B\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{B}\mathfrak{V} \perp \mathfrak{B}B$ und fälle von \mathfrak{B} auf $\mathfrak{U}\mathfrak{V}$ ein Loth; dieses trifft $\mathfrak{U}\mathfrak{V}$ in K . Da nämlich die Punkte $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}, A, K$ ein Kreisviereck bilden, so ist $\angle AK\mathfrak{B} = \angle A\mathfrak{B}\mathfrak{B} = \angle A\mathfrak{B}B$ etc.

Wenn in der Koppellebene die Polcurve p bereits gezeichnet vorliegt, so liefert die letzte Construction zu jedem Punkte \mathfrak{B} von p den entsprechenden Punkt K der Flachpunktcurve u , und zwar ohne Benutzung der zugehörigen Lage des Gliedes AB . Die hiernach zwischen den Curven p und u bestehende Beziehung führt nun in einfachster Weise zur Gleichung von u . Es ist nämlich $\angle A\mathfrak{B}K \sim \angle \mathfrak{B}BK$, mithin

$$\frac{AK}{A\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{B}K}{B\mathfrak{B}}$$

und

$$\frac{\mathfrak{B}K}{A\mathfrak{B}} = \frac{BK}{B\mathfrak{B}},$$

folglich

$$\frac{AK}{A\mathfrak{B}^2} = \frac{BK}{B\mathfrak{B}^2},$$

oder mit Anwendung der früher gebrauchten Bezeichnungen

$$s^2 r' = r^2 s' \dots \dots \dots (17)$$

Aus den Dreiecken AKB und $A\mathfrak{B}B$ folgt ferner

$$\cos \angle AKB = \frac{r'^2 + s'^2 - c^2}{2r's'}$$

und

$$\cos \angle A\mathfrak{B}B = \frac{r^2 + s^2 - c^2}{2rs}.$$

Nun ist aber $\angle AKB = 2 \cdot \angle A\mathfrak{B}B$, also

$$\frac{r'^2 + s'^2 - c^2}{2r's'} = \frac{(r^2 + s^2 - c^2)^2}{2r^2 s^2} - 1$$

oder nach (17)

$$r's'(2r^2 + 2s^2 - c^2) - r^2 s^2 = 0.$$

Dabei genügen r und s der Gleichung (11) der Polcurve p , die wir auch schreiben können

$$(r^2 - s^2)^2 - 2a^2(r^2 + s^2) + a^4 = 0.$$

Bringen wir mit Hülfe von (17) die beiden letzten Gleichungen auf die Form

$$\left(\frac{r^2}{r'}\right)^2 - 2(r' + s') \frac{r^2}{r'} + c^2 = 0$$

und

$$(r' - s')^2 \left(\frac{r^2}{r'}\right)^2 - 2a^2(r' + s') \frac{r^2}{r'} + a^4 = 0,$$

so ergibt sich durch Elimination von $\frac{r^2}{r'}$

$$4a^2(a^2 - c^2)(r' + s')^2 \{(r' - s')^2 - a^2\} + \{c^2(r' - s')^2 - a^4\}^2 = 0;$$

mithin lautet die vollständige Gleichung der Flachpunktcurve

$$[4a^2(a^2 - c^2)(r' + s')^2 \{(r' - s')^2 - a^2\} + \{c^2(r' - s')^2 - a^4\}^2] \\ \cdot [4a^2(a^2 - c^2)(r' - s')^2 \{(r' + s')^2 - a^2\} + \{c^2(r' + s')^2 - a^4\}^2] = 0, \quad (18)$$

oder, wenn zur Abkürzung $r'^2 + s'^2 = V$, $r'^2 - s'^2 = W$ gesetzt wird,

$$16a^4(a^2 - c^2)^2 W^2 (W^2 - 2a^2 V + a^4) \\ + 8a^2(a^2 - c^2) \{c^4 W^2 (2V^2 - W^2) - a^2 c^4 V (4V^2 - 3W^2) \\ - 2a^4 c^2 V W^2 + 2a^6 c^2 (2V^2 - W^2) + a^8 W^2 - a^{10} V\} \\ + (c^4 W^2 - 2a^4 c^2 V + a^8)^2 = 0 \quad \dots \quad (19)$$

Bezeichnen wir mit 0 den Mittelpunkt von AB , mit x und y die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes K für 0 als Anfangspunkt und 0 A als positive x -Achse, so wird $r'^2 = \left(\frac{c}{2} - x\right)^2 + y^2$,

$$s'^2 = \left(\frac{c}{2} + x\right)^2 + y^2, \text{ also } V = 2(x^2 + y^2) + \frac{c^2}{2}, \quad W = -2cx.$$

Durch Einführung dieser Werthe verwandelt sich (19) in eine Gleichung sechsten Grades, welche nur gerade Potenzen von x und y enthält, und zwar ist das Glied sechsten Grades, von einem constanten Factor abgesehen, gleich $(x^2 + y^2)^2 \{(c^2 - a^2)x^2 - a^2 y^2\}$. Die Flachpunktcurve ist also eine in Bezug auf die gewählten Coordinatenachsen symmetrische bicirculare Curve sechster Ordnung. Ihre Asymptoten

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2 y^2 = 0$$

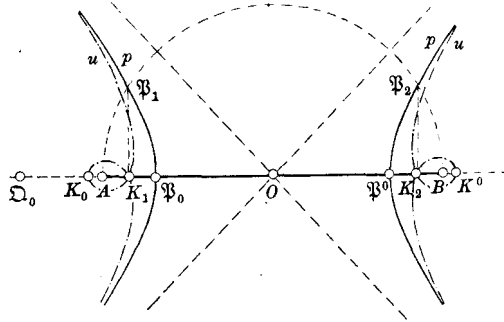
sind identisch mit den Asymptoten eines Kegelschnittes, der A

und B zu Brennpunkten und a zur Hauptachse hat, d. h. der Polcurve p . In Fig. 11, welche für das in Fig. 10 gezeichnete Gelenkviereck die Curven p und u darstellt, ist $c > a$, also p eine Hyperbel.

Verstehen wir unter \mathfrak{P}_1 und \mathfrak{P}_2 die Schnittpunkte von p mit dem Halbkreis über dem Durchmesser AB , unter K_1 und K_2 die entsprechenden Punkte von u , so folgt aus der vorhin abgeleiteten zweiten

Fig. 11.

Construction des Ball'schen Punktes sofort, dass K_1 und K_2 mit den Fusspunkten der Lothe zusammenfallen, die von \mathfrak{P}_1 und \mathfrak{P}_2 auf AB gefällt werden. Nun entsprechen K_1 und K_2 aber auch denjenigen



Punkten von p , die zu \mathfrak{P}_1 und \mathfrak{P}_2 in Bezug auf AB symmetrisch liegen; sie sind also Doppelpunkte von u . Die Gerade AB schneidet u überdies in denjenigen Punkten K_0 und K^0 , die den auf ihr liegenden Scheiteln \mathfrak{P}_0 und \mathfrak{P}^0 von p entsprechen. Nach (17) ist

$$\frac{AK_0}{BK_0} = \left(\frac{A\mathfrak{P}_0}{B\mathfrak{P}_0} \right)^2;$$

bedeutet demnach \mathfrak{Q}_0 den vierten harmonischen Punkt zu A , B , \mathfrak{P}_0 , also den Krümmungsmittelpunkt von p für den Scheitel \mathfrak{P}_0 , so ist K_0 der Mittelpunkt von $\mathfrak{P}_0\mathfrak{Q}_0$.

Setzen wir in (18) $r' = 0$, so giebt sich

$$\{(2a^2 - c^2)s'^2 - a^4\}^4 = 0.$$

Von den beiden Geraden, die den Punkt A mit den imaginären Kreispunkten verbinden, hat folglich jede mit u vier zusammenfallende Punkte gemein; die Punkte A und B sind also singuläre Brennpunkte von u . — Durch das in Artikel 3 angewendete Verfahren finden wir ferner, dass die Curve u zwei Focalcentra hat, und zwar auf AB oder auf der Mittelsenkrechten dieser Strecke, je nachdem $c \geq a$ ist. Ihr Abstand vom Punkte O

ist im ersten Falle

$$= \pm \frac{(2a^2 - c^2)^2}{8ac\sqrt{c^2 - a^2}}, \text{ im zweiten } = \pm \frac{(2a^2 - c^2)^2}{8ac\sqrt{a^2 - c^2}}.$$

Die Curven p und u berühren sich nur in den beiden unendlich fernen Punkten von p ; denn setzen wir in Gleichung (18) $r' - s' = a$, also $r' + s' = 2r' - a$, so folgt

$$(a^2 c^2 - a^4)^2 \cdot [4a^4(a^2 - c^2) \{ (2r' - a)^2 - a^2 \} + \{ c^2(2r' - a)^2 - a^4 \}^2] = 0$$

oder

$$c^4(2r' - a)^4 + 2a^4(2a^2 - 3c^2)(2r' - a)^2 + a^6(4c^2 - 3a^2) = 0.$$

Wir erhalten also vier verschiedene Werthe von r' und mithin vier verschiedene Paare von Schnittpunkten der Curven p und u .

13. Der gleichschenklige Kurbelmechanismus. Wir betrachten einen zweiten Sonderfall des in Fig. 9 dargestellten Mechanismus, indem wir annehmen, es sei $AB = AA = a$, $AB = BB = b$ (Fig. 7). Dann ist $\gamma = \alpha$, $\delta = \beta$, mithin nach Gleichung (13) $\chi = 180^\circ - \alpha$, d. h. $\angle B\wp K = 180^\circ - (\alpha + \beta)$. Ziehen wir daher $\wp\wp \parallel AB$ bis AB , so ist $\angle B\wp K = \angle \wp\wp B$. Gleichung (12) verwandelt sich gegenwärtig in

$$\wp W = \frac{h}{\sin(\beta - \alpha)},$$

folglich wird

$$\wp K = \wp W \sin \chi = \frac{h \sin \alpha}{\sin(\beta - \alpha)}$$

d. h.

$$= \wp\wp;$$

der Punkt K liegt also symmetrisch zu \wp in Bezug auf $B\wp$. Hieraus folgt weiter, dass die Dreiecke $B\wp K$ und $BA\wp$ einander ähnlich sind; mithin ist

$$\frac{BK}{B\wp} = \frac{B\wp}{BA}.$$

Gebrauchen wir nun wieder die Bezeichnungen $B\wp = s$, $BK = s'$ und setzen überdies $\angle \wp BA = \vartheta$, $\angle KBA = \vartheta'$, so finden wir, dass entsprechende Punkte \wp und K der Curven p und u durch die Gleichungen mit einander verknüpft sind

$$s' = \frac{s^2}{b}, \vartheta' = 2\vartheta. \quad (20)$$

Betrachten wir endlich die Strecken $B\beta$ und BK bezw. als die geometrischen Bilder der complexen Grössen

$$z = x + iy = s e^{i\vartheta}, z' = x' + iy' = s' e^{i\vartheta'},$$

so können wir das soeben erhaltene Resultat auch in folgender Weise aussprechen: Die Flachpunktcurve u entsteht aus der Polcurve p durch conforme Abbildung der Koppelsebene auf sich selbst mittelst der Function

$$z' = \frac{z^2}{b}.$$

Die Eigenschaften der Curve u ergeben sich demnach ohne Weiteres aus den in Artikel 8 ermittelten Eigenschaften der Curve p . — Spalten wir die letzte Gleichung in

$$x^2 - y^2 = b x' \quad (21)$$

und

$$2xy = b y' \quad (22)$$

und bezeichnen mit E die ursprüngliche, mit E' die transformirte Koppelsebene, so erhalten wir zwischen E' und E die folgende ein-vierdeutige Beziehung: Einem reellen Punkte $C'(x', y')$ von E' entsprechen in E zwei reelle Punkte C, C_1 und zwei conjugirt imaginäre C_2, C_3 , nämlich die vier Schnittpunkte der durch die Gleichungen (21) und (22) dargestellten Hyperbeln; sind s', ϑ' die Polarcoordinaten von C' , so folgt für C und C_1

$$s = s_1 = \sqrt{b s'}, \vartheta = \frac{\vartheta'}{2}, \vartheta_1 = \pi + \frac{\vartheta'}{2}$$

und für C_2, C_3

$$s_2 = s_3 = i \sqrt{b s'}, \vartheta_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\vartheta'}{2}, \vartheta_3 = \frac{3\pi}{2} + \frac{\vartheta'}{2}.$$

Ist C' unendlich fern, so wird C_1 identisch mit C ($s = \infty, \vartheta = \frac{\vartheta'}{2}$);

ebenso vereinigen sich C_2 und C_3 zu einem reellen unendlich fernen Punkte ($\vartheta_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\vartheta'}{2}$). Dem Punkte A der Ebene E' ist in E ein Punktquadrupel zugeordnet, dessen einer Punkt mit

A zusammenfällt; dagegen sind B und die imaginären Kreispunkte I und J drei selbstentsprechende Punkte von E' und E insofern, als für jeden dieser Punkte das ganze zugeordnete Quadrupel mit ihm selbst identisch ist. — Einer in E' beliebig angenommenen Geraden g' entspricht in E eine Hyperbel g ; den acht Schnittpunkten von g und p sind also in E' ebenso viele Schnittpunkte von g' und u zugeordnet, d. h. die Curve u ist von der achten Ordnung. Geht aber g' durch einen der drei selbstentsprechenden Punkte B, I, J , so zerfällt g in zwei Geraden, die sich in demselben Punkte schneiden. Es entsprechen z. B. der Geraden $C'I$ die Geraden CI und C_1I , von denen die eine den Punkt C_2 , die andere den Punkt C_3 enthält. Nun zählt der Punkt I doppelt unter den Schnittpunkten von p mit CI und C_1I ; folglich hat u mit $C'I$ in I vier zusammenfallende Punkte gemein, d. h. die imaginären Kreispunkte sind vierfache Punkte von u . Da ferner p in I eine Spitze mit der Tangente IF besitzt, so fallen die vier Tangenten von u in I mit der Geraden nach dem Punkte F' zusammen, der in E' dem Punkte F der Fig. 8 entspricht, und F' ist demnach das einzige Focalcentrum von u . — Die Gerade BI entspricht sich selbst bei der Transformation von E in E' ; der Punkt B ist folglich ein Brennpunkt von u von der besonderen Beschaffenheit, dass jede der Geraden, die ihn mit einem der beiden imaginären Kreispunkte verbindet, ausserdem noch vier zusammenfallende Punkte mit u gemein hat.

Schneidet p die Gerade l der Fig. 8 in den Punktpaaren G, G_1 und H, H_1 , so entspricht jedem von ihnen in E' ein einziger Punkt G' bzw. H' der Geraden AB , also jedesmal ein Doppelpunkt von u . Ein dritter Doppelpunkt von u ist der Punkt A , den E und E' entsprechend gemein haben. — Da die Abbildung, die p in u überführt, eine conforme ist, so folgt weiter, dass die Tangenten in je zwei entsprechenden Punkten von p und u mit den von B nach diesen Punkten gehenden Strahlen gleiche Winkel bilden. Die Curven p und u berühren sich daher in ihrem gemeinsamen Doppelpunkte A .

Um noch die Krümmung in entsprechenden Curvenpunkten zu untersuchen, bezeichnen wir zunächst ganz allgemein mit k und k' irgend zwei entsprechende Curven von E und E' , mit

P, Q, R drei unendlich benachbarte Punkte von k , mit P', Q', R' die zugeordneten Punkte von k' und setzen $BP = s$, $BP' = s'$, $\angle PBA = \vartheta$, $\angle P'BA = \vartheta'$, $\angle QBP = d\vartheta$, $\angle Q'BP' = d\vartheta'$, $PQ = d\sigma$, $P'Q' = d\sigma'$, $\angle QRP, PQ = d\tau$, $\angle Q'R', P'Q' = d\tau'$, $\angle PQB = \omega$, $\angle P'Q'B = \omega'$ (Fig. 12). Nach einer vorhin gemachten Bemerkung bildet das Curvenelement $P'Q'$ mit BP' denselben Winkel wie PQ mit BP , und das Analoga gilt von den Elementen $Q'R'$ und QR ; mithin ist

$$d\tau' - d\vartheta' = d\tau - d\vartheta.$$

Aus (20) folgt aber

$$d\vartheta' = 2d\vartheta,$$

also wird

$$d\tau' = d\tau + d\vartheta.$$

Ferner ergibt sich aus den Dreiecken BPQ und $BP'Q'$

$$d\sigma = \frac{s d\vartheta}{\sin \omega}$$

und

$$d\sigma' = \frac{s' d\vartheta'}{\sin \omega'}.$$

Nun ist

$$\omega' + d\vartheta' = \omega + d\vartheta,$$

also

$$\omega' = \omega - d\vartheta;$$

hieraus folgt

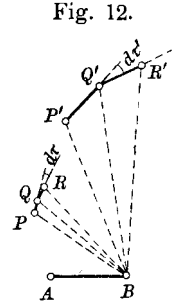
$$d\sigma' = 2 \frac{s'}{s} d\sigma.$$

Verstehen wir jetzt unter ϱ und ϱ' bezw. die Krümmungsradien von k und k' in P und P' , so erhalten wir

$$\varrho = \frac{d\sigma}{d\tau}$$

und

$$\begin{aligned} \varrho' &= \frac{d\sigma'}{d\tau'} = 2 \frac{s'}{s} \cdot \frac{d\sigma}{d\tau + d\vartheta} = 2 \frac{s'}{s} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\varrho} + \frac{\sin \omega}{s}} \\ &= 2 s' \cdot \frac{\varrho}{s + \varrho \sin \omega} = 2 \frac{s^2}{b} \cdot \frac{\varrho}{s + \varrho \sin \omega} \quad \dots \quad (23) \end{aligned}$$



Dabei bedeutet ω den Winkel, den die Tangente von k in P mit BP einschliesst. — Wir wenden die gefundene Formel an auf den sich selbst entsprechenden Punkt A der Curven p und u . Für $r = 0$ und $\cos \varphi = \frac{b}{a}$ folgt aus Gleichung (10)

$$\varrho = \frac{ab}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{b}{\sin \varphi};$$

die beiden Krümmungsmittelpunkte des Punktes A der Polcurve liegen daher auf der Geraden l . Demnach wird $\varrho \sin \omega = b$, und da auch $s = b$ ist, so geht Gleichung (23) über in $\varphi' = \varphi$; d. h. die Curven p und u osculiren einander in ihrem gemeinsamen Doppelpunkte A . Dieser zählt also achtfach unter den 32 Schnittpunkten von p und u , und dasselbe gilt von jedem der imaginären Kreispunkte. Die übrigen acht Schnittpunkte sind in Fig. 8 imaginär.

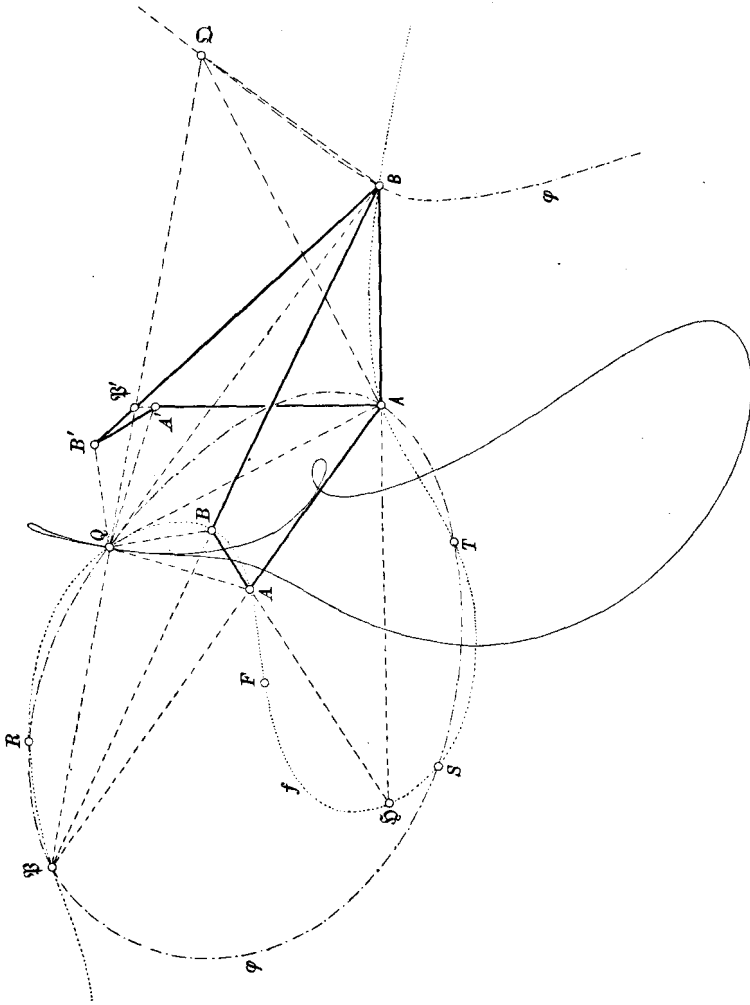
III. Die Uebergangscurve q .

14. In Fig. 13 ist $ABBA$ wieder ein beliebiger Kurbelmechanismus; für die gezeichnete Koppellage AB sollen diejenigen Punkte der Koppellebene bestimmt werden, die augenblicklich einen Selbstberührungspunkt ihrer Bahn durchschreiten.

Angenommen, der Punkt Q genüge der gestellten Aufgabe, so existirt eine zweite Koppellage $A'B'$, für welche er sich wieder an der mit Q bezeichneten Stelle befindet, es ist also $\angle ABQ \cong \angle A'B'Q$. Die Geradenpaare AA' , BB' und AA' , BB' schneiden sich bezw. in den Polen \mathfrak{P} und \mathfrak{P}' der betrachteten Koppellagen; mithin sind $\mathfrak{P}Q$ und $\mathfrak{P}'Q$ die Normalen der Bahncurve des Punktes Q , und da diese Curve in Q einen Selbstberührungspunkt haben soll, so liegen die Punkte \mathfrak{P} , \mathfrak{P}' und Q auf einer Geraden. Die sechs Geraden von A und B nach \mathfrak{P} , \mathfrak{P}' Q sind entsprechende Strahlen zweier perspectiven Strahlenbüschel; dabei halbiren AQ und BQ bezw. die Winkel $\mathfrak{P}'A\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'B\mathfrak{P}$. Der vierte harmonische Strahl zu $A\mathfrak{P}$, $A\mathfrak{P}'$ und AQ ist daher senkrecht zu AQ ; ihm entspricht im anderen Büschel das Loth in B zu BQ , und die beiden Lothe schneiden

sich auf $\mathfrak{P}\mathfrak{P}'$ im vierten harmonischen Punkte \mathfrak{Q} zu \mathfrak{P} , \mathfrak{P}' und Q . Die Punkte A , B , Q , \mathfrak{Q} liegen also auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt sich auf $\mathfrak{P}\mathfrak{P}'$ befindet. Markiren wir nun auf jedem

Fig. 13.



der durch A und B gelegten Kreise die beiden Endpunkte des nach \mathfrak{P} gehenden Durchmessers, so erhalten wir bekanntlich eine specielle circulare Curve dritter Ordnung φ , die als Focalcurve

bezeichnet wird ¹⁾. Diese Focalcurve φ , die \mathfrak{P} zum Focalcentrum und A und B zu Grundpunkten hat, ist demnach der erste geometrische Ort des gesuchten Punktes Q . Sie ist, wie nur beiläufig bemerkt sei, stets zweitheilig, weil ihre Grundpunkte reell sind.

Aus der Gleichheit der Winkel AQA' und BQB' folgt ferner, dass $\angle AQA = \angle BQB$ und folglich $\angle AQB = \angle AQB$ ist, und diese Beziehung gilt bekanntlich für alle Punkte der Koppalebene, die sich augenblicklich überhaupt in einem Doppelpunkte ihrer Bahn befinden. Der Punkt Q liegt daher auf einer zweiten Focalcurve f , dem Ort der Brennpunkte aller Kegelschnitte, welche die Seiten des Vierecks $ABBA$ berühren. Die Curve f geht durch A, B, B, A, \mathfrak{P} und durch den Schnittpunkt \mathfrak{H} von AB und AB . Ihr Focalcentrum ist der Schnittpunkt F der den Dreiecken $\mathfrak{P}AB, \mathfrak{P}AB, \mathfrak{H}AA$ und $\mathfrak{H}BB$ umgeschriebenen Kreise, und ihre Mittellinie geht durch die Mittelpunkte der Strecken AB, BA und $\mathfrak{P}\mathfrak{H}$. Da die Punktpaare $A, B; B, A; \mathfrak{P}, \mathfrak{H}$ aus jedem Punkte von f , also z. B. auch aus \mathfrak{P} , durch eine symmetrische Involution projectirt werden, so bildet die Tangente der Curve in \mathfrak{P} mit $\mathfrak{P}B$ denselben Winkel wie $\mathfrak{P}A$ mit $\mathfrak{P}\mathfrak{H}$; sie fällt demnach zusammen mit der Tangente der Polcurve p .

Die Curven φ und f haben ausser \mathfrak{P}, A, B und den imaginären Kreispunkten noch vier Punkte mit einander gemein; für jede Koppellage giebt es also im Allgemeinen vier Systempunkte, die sich augenblicklich in einem Selbstberührungspunkte ihrer Bahn befinden. — In Fig. 13 schneiden sich φ und f in vier reellen Punkten Q, R, S, T . Die Figur zeigt die Bahncurve des Punktes Q .

15. Betrachten wir die Seite AB des gegebenen Gelenkvierecks als fest und zeichnen die Strecke AB in einer Reihe neuer Lagen $A_1B_1, A_2B_2 \dots$, so erhalten wir durch Wiederholung der eben ausgeführten Construction die Focalcurven φ_1

¹⁾ Vergl. Schröter, Ueber eine besondere Curve dritter Ordnung, Math. Annalen V, S. 50, sowie Durège, Ueber die Curve dritter Ordnung, welche den geometrischen Ort der Brennpunkte einer Kegelschnittschar bildet, daselbst, S. 83.

und f_1, φ_2 und $f_2 \dots$ bezw. mit den Schnittpunkten $Q_1, R_1, S_1, T_1; Q_2, R_2, S_2, T_2 \dots$, und dann ergibt sich als Ort dieser sämtlichen Punktquadrupel die Uebergangscurve q .

Im Focalcentrum F der Curve f schneiden sich die durch \S, A, A und \S, B, B gelegten Kreise; es ist also $\angle AAF = \angle A\S F = \angle BBF$ und $\angle AFA = \angle A\S A = \angle BFB$, d. h. $\triangle FAA \sim \triangle FBB$, mithin

$$\frac{FA}{FB} = \frac{AA}{BB}.$$

Dasselbe gilt auch von den Focalcentren $F_1, F_2 \dots$ der Curven $f_1, f_2 \dots$. Diese Focalcentra erfüllen daher den Kreis, der die Strecke AB innen und aussen im Verhältniss $AA:BB$ theilt, und dessen Mittelpunkt auf AB liegt.

Da die Bahncurve des Punktes Q in ihrem Selbstberührungspunkte zwei unendlich benachbarte Doppelpunkte besitzt, so geht durch Q auch die zu f unendlich benachbarte Curve der Schar $f, f_1, f_2 \dots$. Die Curven $f, f_1, f_2 \dots$ umhüllen daher einerseits die Uebergangscurve q , andererseits die Polcurve p .

Nach früheren Darlegungen¹⁾ ist q eine Curve zehnter Ordnung mit Doppelpunkten in A und B und vierfachen Punkten in den imaginären Kreispunkten. Ausser den vier eben genannten singulären Punkten haben die Curven p und q noch 36 Punkte, darunter 12 Berührungspunkte, mit einander gemein²⁾. — Von den 30 Schnittpunkten der Curven q und f entfallen je vier auf die imaginären Kreispunkte und je zwei auf die Punkte A, B, Q, R, S, T . Die übrig bleibenden zehn Schnittpunkte sind solche Punkte der Koppellebene, die sich augenblicklich in einem gewöhnlichen Knotenpunkte ihrer Bahn befinden, und deren Bahncurven in ihrem weiteren Verlauf noch einen Selbstberührungspunkt aufweisen.

¹⁾ Ueber die Doppelpunkte der Koppelcurve, a. a. O. S. 303 u. 372. —

²⁾ Beiträge zur Theorie des ebenen Gelenkvierecks, a. a. O. S. 271.

ZUR ELEMENTAREN THEORIE
DER
KREISEL-BEWEGUNG¹⁾.

VON
ALEX. WERNICKE.

¹⁾ Vergl. hierzu Ad. Wernickes Lehrbuch der Mechanik (bei Friedr. Vieweg & Sohn in Braunschweig), IV. Aufl., im 1. Theil §. 102 und Anwendung 13 zum 4. Kapitel des 3. Abschnittes.

§. 1.

In seinen Vorlesungen über technische Mechanik hat Herr Föppl den Flächensatz mehrfach herangezogen, unter Anderem auch, um die Grundgleichungen des Schlick'schen Verfahrens für die Massenausgleichung bei Schiffsmaschinen kurz und elegant abzuleiten (Bd. IV, S. 127 u. f.). Dabei macht er die Bemerkung (S. 129), „dass der Flächensatz bisher in technischen Kreisen noch längst nicht die Beachtung gefunden hat, die er in Wirklichkeit verdient“.

Diese durchaus zutreffende Bemerkung lässt sich dahin erweitern, dass von den sogenannten Principien der Mechanik gerade der Flächensatz bisher überhaupt verhältnissmässig selten für die wirkliche Lösung besonderer Aufgaben verwandt worden ist.

Ein Grund dafür dürfte in dem Umstande zu suchen sein, dass er noch nicht unter die gangbaren Lehrsätze der elementaren Mechanik aufgenommen ist, während dies bei den anderen sogenannten Principien (Bewegung des Schwerpunktes, Beziehung von Energie und Arbeit u. s. w.) längst der Fall ist.

Ein zweiter Grund liegt vielleicht darin, dass der Flächensatz gerade in der Beziehung, welcher er seine Benennung verdankt, für Anwendungen nicht allzu günstig ist, weil dabei sein innerster Kern, die Verbindung des Momentes der Bewegungsgrösse mit dem Momente der äusseren Kräfte, verschleiert wird.

In rechnerischer Beziehung besteht wohl sein Werth hauptsächlich darin, dass er, ebenso wie der Satz von Energie und Arbeit, gelegentlich eine Integration erspart.

Im Folgenden soll der Versuch gemacht werden, den Lehrsatz durchaus elementar zu begründen, und zwar so, dass sein Kern dabei zu Tage tritt.

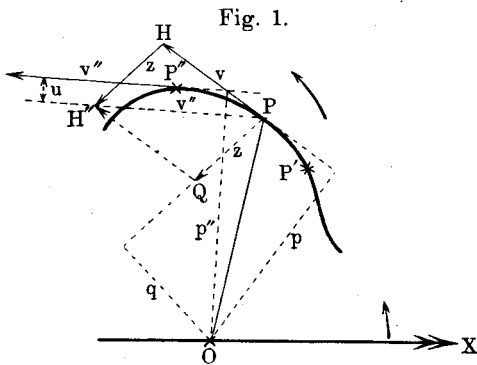
Ausserdem soll seine Verwendbarkeit, gerade in der bezeichneten Hinsicht, an einem Beispiel gezeigt werden, das sich augen-

blicklich einer gewissen Theilnahme erfreut, nämlich für die (elementare) Behandlung der Bewegung des Kreisel.

Dabei soll der Begriff der elementaren Behandlung in dem sich für die angewandte Mathematik mehr und mehr einbürgernden Sinne bestimmt werden, dass Verwendung von Differential- und Integralrechnung ausgeschlossen wird, dass aber einfache Grenzübergänge zugelassen werden und dass demnach auch die Ableitungen der einfachsten Functionen (Potenz, Sinus, Cosinus und Exponentialgrösse) zu Gebote stehen.

§. 2.

Wir betrachten zunächst die ebene Bewegung eines Punktes (vergl. Fig. 1), der von P' über P nach P'' läuft. Trägt man



die Geschwindigkeiten v und v'' für P und P'' in diesen Punkten als Vektoren an, so stellen pv und $p''v''$ die Momente dieser Geschwindigkeiten für einen beliebigen Punkt O dar. Verschiebt man v'' von P'' nach P , so liefert das Parallelogramm $PHH''Q$ die Strecke z , welche die Aenderung der

Geschwindigkeit für den Uebergang von P nach P'' darstellt. Wendet man auf dieses Parallelogramm den Momentensatz an für O als Drehpunkt, so gilt

$$(p'' - u) v'' = pv + qz$$

oder

$$p''v'' - pv = qz + uv''.$$

Geschieht der Uebergang von P nach P'' in der Zeit τ , so bezeichnet $\frac{z}{\tau}$ die entsprechende mittlere Beschleunigung, und man hat

$$\frac{p''v'' - pv}{\tau} = q \cdot \frac{z}{\tau} + \frac{u}{\tau} \cdot v''.$$

Beim Grenzübergange für $\lim \tau = 0$ ist $u = PP' \cdot \sin H''PH$

zu setzen, so dass $\frac{u}{\tau} = \frac{PP''}{\tau} \cdot \sin H'PH$ für $\lim \tau = 0$ verschwindet, während dabei $\frac{z}{\tau}$ in die Gesamtbeschleunigung j_G übergeht.

Demnach ist

$$\lim \left[\frac{p''v'' - pv}{\tau} \right] = q \cdot j_G.$$

Handelt es sich bei der betrachteten Bewegung um einen materiellen Punkt W von der Masse μ , so kann man statt der Geschwindigkeiten in P und P'' die entsprechenden Bewegungsgrößen als Vektoren antragen. Dabei erhält man die Gleichung

$$\lim \left[\frac{p''(\mu v'') - p(\mu v)}{\tau} \right] = q \cdot (\mu j_G).$$

Jetzt bedeutet μj_G die Kraft, welche thatsächlich in der Bewegung zur Geltung kommt.

Gehört der materielle Punkt W einem System materieller Punkte an, so erwächst die Effectivkraft μj_G aus der Resultante der äusseren und der Resultante der inneren auf W wirkenden Kräfte. Projicirt man diese beiden Resultanten, falls sie nicht in der Ebene der Zeichnung liegen, auf diese, so erwächst die Effectivkraft auf alle Fälle aus zwei, in der Ebene der Zeichnung gelegenen Kräften A und J , deren Arme für O als Drehpunkt bezw. a und b sein mögen.

Demnach gilt:

$$\lim \left[\frac{p''(\mu v'') - p(\mu v)}{\tau} \right] = a \cdot A + b \cdot J.$$

Wendet man die erhaltene Gleichung auf alle (n) Punkte eines materiellen, in der Ebene der Zeichnung gelegenen und in ihr beweglichen Systems an, so erhält man bei Addition der einzelnen Gleichungen

$$\lim \left[\frac{\Sigma p''(\mu v'') - \Sigma p(\mu v)}{\tau} \right] = \Sigma(a \cdot A) + \Sigma(b \cdot J).$$

Da die inneren Kräfte des Systems in Paare von Gegenkräften zerfallen, so ist $\Sigma(b \cdot J) = 0$, d. h. man hat

$$\lim \left[\frac{\Sigma p''(\mu v'') - \Sigma p(\mu v)}{\tau} \right] = \Sigma(a \cdot A).$$

Die linke Seite dieser Gleichung stellt die Erzeugungsgeschwindigkeit der Grösse $\Sigma p(\mu v)$ dar, welche „Moment der Bewegungsgrösse für das System“ genannt werden mag.

Demnach gilt: Für jeden Drehpunkt ist die Erzeugungsgeschwindigkeit des Momentes der Bewegungsgrösse gleich dem Momente der äusseren Kräfte.

Dieser Satz gilt zunächst für ein ebenes System von n materiellen Punkten.

Seine Erweiterung für $\lim n = \infty$ bietet keine besonderen Schwierigkeiten dar.

Bezeichnet man die Flächengeschwindigkeiten (vergl. Fig. 1) in Bezug auf O für P und P'' bzw. durch V und V'' , so ist $V = \frac{1}{2} p v$ und $V'' = \frac{1}{2} p'' v''$.

Führt man μV als Massenflächengeschwindigkeit eines materiellen Punktes und $\Sigma \mu V$ als Massenflächengeschwindigkeit eines materiellen Systems ein, so stellt die linke Seite der abgeleiteten Gleichung die doppelte Massenbeschleunigung des Systems dar, so dass der gewonnene Satz auch die Form erhalten kann: Für jeden Drehpunkt ist die doppelte Massenflächenbeschleunigung gleich dem Momente der äusseren Kräfte.

In dem Sonderfalle, wenn das Moment der äusseren Kräfte verschwindet, gilt: Das Moment der Bewegungsgrösse ist constant bzw. die Massenflächengeschwindigkeit ist unveränderlich (Flächensatz).

Um den Satz auf räumliche materielle Systeme auszudehnen, braucht man nur das betrachtete ebene System als rechtwinklige Projection eines räumlichen Systems aufzufassen und zwar so, dass man jedem Projectionspunkte die Masse des projecirten Punktes zuordnet.

Anstatt des Drehpunktes O tritt dabei natürlich eine Achse durch O ein, senkrecht zur Ebene der Zeichnung.

Für das räumliche materielle System lässt sich der Satz demnach so aussprechen: Für jede Achse ist die Erzeugungsgeschwindigkeit des Momentes der Bewegungsgrösse gleich dem Momente der äusseren Kräfte.

Ist das materielle System im Besonderen ein starrer Körper mit fester Drehungsachse, so nimmt unser Satz für diese als Achse eine sehr einfache und bekannte Gestalt an.

Bezeichnet man die Tangentialbeschleunigung eines Punktes im Abstände r von der Achse mit j_T , so ist hier $q \cdot j_G = r \cdot j_T$ und $\mu \cdot q \cdot j_G = \mu r^2 \cdot \iota$, wenn man noch j_T durch die Winkelbeschleunigung ι ausdrückt.

Demnach wird hier

$$\Sigma \mu r^2 \iota = \iota \Sigma \mu r^2 = \Sigma (aA),$$

d. h. die Winkelbeschleunigung ist der Quotient aus Kraftmoment und Trägheitsmoment.

Es ist nun auch leicht, dem Satze eine noch allgemeinere Form zu geben.

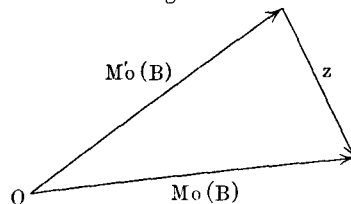
Denkt man für jeden Augenblick an jedem Punkte eines materiellen Systems dessen Bewegungsgrösse als Vector angetragen, so liefert die rechtwinklige Projection dieses mit Vektoren behafteten materiellen Systems auf eine Ebene, senkrecht zu irgend einer Achse, für diese Achse unmittelbar die Grössen, auf welche sich unser Satz bezieht.

Projicirt man das System auf die drei Ebenen eines rechtwinkligen Koordinatenkreuzes vom Anfangspunkte O , so kann man die Momente für O für die Ebenen XOY , YOZ , ZOX wie Kraftmomente bezw. auf den Achsen OZ , OX , OY als Vektoren auftragen und aus ihnen einen resultirenden Vector bilden, welcher das Moment der Bewegungsgrösse des Systems für O als Zurückführungspunkt darstellt.

Zu demselben resultirenden Vector würde man gelangen, wenn man die übliche Behandlung eines Kräftesystems mit zerstreuten Angriffspunkten für O auf die als Vektoren dargestellten Bewegungsgrössen des materiellen Systems überträgt. Denkt man diesen resultirenden Vector für jeden Augenblick in O angetragen, so beschreibt dessen Spitze eine Linie, welche sich mit dem Hodographen Hamilton's vergleichen lässt, man kann sie die „Linie des Momentes der Bewegungsgrösse“ für O nennen.

Stellen die Vektoren $M_o(B)$ und $M_o(B)$ in Fig. 2 die Momente der Bewegungsgrösse des Systems für zwei Zeitpunkte dar, zwischen denen die Zeit τ liegt, so bezeichnet z den Zusatz, welcher für ihre

Fig. 2.



Ueberführung nöthig ist und $\frac{z}{\tau}$ nach Grösse und Richtung die mittlere Erzeugungsgeschwindigkeit für den Uebergang.

Geht man zur Grenze über, so stimmt das Moment der äusseren Kräfte, welches man gleichfalls als Vector einführen kann, für den gewählten Zeitpunkt überein mit $\lim \left(\frac{z}{\tau} \right)$.

Demgemäss gelangen wir zu dem Satze: Das Moment der äusseren Kräfte stellt als Vector in jedem Augenblicke für die „Linie des Momentes der Bewegungsgrösse“ die Geschwindigkeit nach Grösse und Richtung dar.

Projicirt man endlich das materielle System auf die einzelnen Ebenen eines Ebenenbündels durch O , so ist das Moment der Bewegungsgrösse der Projectionen für O ein Maximum für diejenige Ebene, welche senkrecht steht auf dem Vector, welcher das Moment der Bewegungsgrösse für das System darstellt.

Diese Ebene durch O wechselt im Allgemeinen von Augenblick zu Augenblick und ebenso die Grösse des Maximalwerthes des Momentes, weil sich jener Vector im Allgemeinen von Augenblick zu Augenblick ändert.

Hat im Besonderen das Moment der äusseren Kräfte für O den Werth Null, so behält jene Ebene (die unveränderliche Ebene von Laplace) durch O bei constantem Werthe des Maximums ihre Lage bei, weil dann der Vector, welcher das Moment der Bewegungsgrösse für das System darstellt, nach Grösse und Richtung unveränderlich ist.

Steht das System der äusseren Kräfte im Gleichgewichte, so gilt die für O durchgeführte Betrachtung für jeden Punkt des Raumes, d. h. für jeden bestimmten Punkt des Raumes als Zurückführungspunkt giebt es ein bestimmtes constantes Moment der Bewegungsgrösse und eine bestimmte unveränderliche Ebene.

Ruht ausserdem der Massenmittelpunkt des Systems, so fallen die Ebenen für die verschiedenen Zurückführungspunkte zusammen, d. h. hier giebt es eine Richtung im Raume, deren Normalebenen sämmtlich die Rolle einer unveränderlichen Ebene spielen.

Da die Massenflächengeschwindigkeit constant ist, sobald das Moment der äusseren Kräfte verschwindet, so werden in

diesem Falle in gleichen Zeiten gleiche Massenflächen beschrieben (Erhaltung der Flächen).

§. 3.

Wir betrachten nun einen Kreisel (Rotationskörper), wie ihn Fig. 3 andeutet, und zwar denken wir uns ihn schief auf das Lager in O aufgesetzt, nachdem er eine kräftige Drehung um seine Achse OZ erhalten hat.

Um die Bewegung der Achse OZ zu untersuchen, benutzen wir ein bewegliches Koordinatenkreuz, indem wir in der Verticalebene ZOV durch O eine Y -Achse senkrecht zu OZ , und ausserdem eine X -Achse senkrecht zur Ebene ZOY einführen.

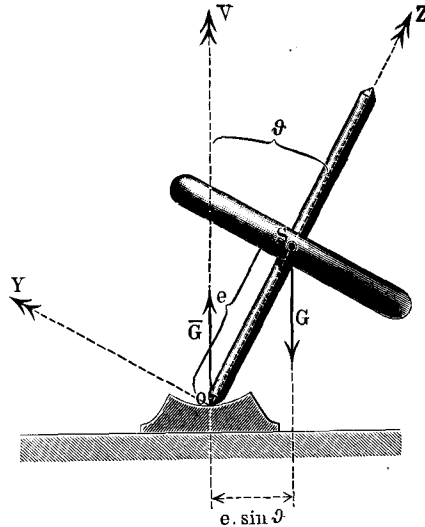
Um die Lage dieses Kreuzes im Raume zu bestimmen, führen wir $\angle ZOV = \vartheta$ ein, suchen ferner die Spuren der Ebene ZOY mit der Horizontalebene durch O auf und messen die Stellung (η) dieser Spuren gegen eine feste Gerade OH der Horizontalebene.

Die Relativbewegung des Kreisels gegen die XY -Ebene ist nicht von wesentlicher Bedeutung, da dieser wegen seiner Form als Rotationskörper für alle Geraden der XY -Ebene durch O dasselbe Trägheitsmoment hat.

Bei Vernachlässigung der Reibungen kommt von äusseren Kräften nur das Gewicht G des Kreisels in dessen Schwerpunkt S in Betracht und die entsprechende Reaction \bar{G} in O . Für die Achse OV hat das Moment der äusseren Kräfte den Werth Null, so dass also für diese Achse das Moment der Bewegungsgrösse des Kreisels einen constanten Werth B hat (vergl. §. 2).

Bezeichnet man die Componenten der Winkelgeschwindigkeit

Fig. 3.



für die Achsen OX , OY , OZ zur Zeit t bezw. durch φ_x , φ_y , φ_z , so hat das Moment der Bewegungsgrösse zur Zeit t bezw. die Componenten $\mathfrak{I}r \cdot \varphi_x$, $\mathfrak{I}r \cdot \varphi_y$, $\mathfrak{I}r_z \cdot \varphi_z$ wenn man die Trägheitsmomente für die Achsen OX und OY durch $\mathfrak{I}r$ und für die Achse OZ durch $\mathfrak{I}r_z$ bezeichnet.

Projicirt man diese Componenten auf die Achse OV , so ergibt sich

$$1) \quad B = \varphi_y \cdot \mathfrak{I}r \cdot \sin \vartheta + \varphi_z \cdot \mathfrak{I}r_z \cdot \cos \vartheta.$$

Bezeichnet man die Anfangswerthe von φ_x , φ_y , φ_z und ϑ bezw. durch γ_x , γ_y , γ_z und ϑ_0 , so ist auch

$$2) \quad B = \gamma_y \cdot \mathfrak{I}r \cdot \sin \vartheta_0 + \gamma_z \cdot \mathfrak{I}r_z \cdot \cos \vartheta_0.$$

Vergleicht man ferner eine beliebige Stellung (ϑ) der Achse OZ mit der Anfangsstellung (ϑ_0), so ist die Arbeit A der äusseren Kräfte für die Aenderung der Stellung (Senkung)

$$3) \quad A = Ge(\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta).$$

Diese Arbeit entspricht dem Zuwachs an lebendiger Kraft (Energie), d. h. es ist $A = E$ für

$$4) \quad E = \left(\frac{1}{2} \varphi_x^2 \cdot \mathfrak{I}r + \frac{1}{2} \varphi_y^2 \cdot \mathfrak{I}r + \frac{1}{2} \varphi_z^2 \cdot \mathfrak{I}r_z\right) \\ - \left(\frac{1}{2} \gamma_x^2 \cdot \mathfrak{I}r + \frac{1}{2} \gamma_y^2 \cdot \mathfrak{I}r + \frac{1}{2} \gamma_z^2 \cdot \mathfrak{I}r_z\right).$$

Da der Kreisel bei Beginn seiner Bewegung nur eine Drehung um die Achse OZ haben sollte, so ist $\gamma_x = 0$ und $\gamma_y = 0$.

Da ferner die Kraft G die Achse OZ schneidet, so kann sie keine Veränderung von φ_z bewirken, d. h. es ist stets $\varphi_z = \gamma_z$.

Danach ergibt sich aus Gleichung 1) und 2)

$$5) \quad \varphi_y \cdot \mathfrak{I}r \cdot \sin \vartheta + \gamma_z \cdot \mathfrak{I}r_z \cdot \cos \vartheta = \gamma_z \cdot \mathfrak{I}r_z \cdot \cos \vartheta_0$$

und aus Gleichung 3) und 4)

$$6) \quad \frac{1}{2} \mathfrak{I}r(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) = Ge(\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta).$$

Aus Gleichung 5) folgt

$$7) \quad \varphi_y = \frac{\gamma_z \cdot \mathfrak{I}r_z}{\mathfrak{I}r} \cdot \frac{\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta}{\sin \vartheta}$$

und daraus, mit Rücksicht auf Gleichung 6)

$$8) \quad \varphi_x = \pm \sqrt{(\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta) \left[\frac{2 Ge}{\mathfrak{I}r} - \frac{\gamma_z^2 \mathfrak{I}r_z^2}{\mathfrak{I}r^2} \frac{\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} \right]}$$

Da die Arbeit der äusseren Kräfte in einer Senkung besteht, so ist $\vartheta \geq \vartheta_0$ und demnach ist $\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta$ positiv oder Null,

es muss also auch die Klammergrösse unter der Wurzel, welche φ_x darstellt, positiv oder Null sein, d. h. man hat

$$\frac{2 Ge \cdot \mathfrak{I}r}{\gamma_z^2 \cdot \mathfrak{I}r_z^2} \geq \frac{\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta}.$$

Bezeichnet man $\frac{\gamma_z^2 \mathfrak{I}r_z^2}{2 Ge \mathfrak{I}r}$ durch $2m$, so ist für die Grenze
(=) in Geltung:

$$\sin^2 \vartheta = 1 - \cos^2 \vartheta = 2m \cos \vartheta_0 - 2m \cos \vartheta,$$

d. h. man hat

$$\cos \vartheta = m \pm \sqrt{m^2 - 2m \cos \vartheta_0 + 1}$$

Da m proportional zu γ_z^2 ist, so ist m bei kräftigen Drehungen, welche hier vorausgesetzt werden, relativ gross.

Entwickelt man die Wurzelgrösse von $\cos \vartheta$ für grosse Werthe von m , so gilt

$$\cos \vartheta = m \pm \left(m - \cos \vartheta_0 + \frac{\sin^2 \vartheta_0}{2m} + \dots \right),$$

d. h. es ist

$$\cos \vartheta = 2m - \cos \vartheta_0 + \frac{\sin^2 \vartheta_0}{2m} + \dots$$

oder

$$\cos \vartheta = \cos \vartheta_0 - \frac{\sin^2 \vartheta_0}{2m} + \dots$$

Man sieht, dass nur der zweite Werth von ϑ , welcher durch $\bar{\vartheta}$ bezeichnet werden mag, brauchbar ist.

Setzt man $\bar{\vartheta} = \vartheta_0 + \bar{\delta}$, so ist $\cos \vartheta = \cos \vartheta_0 \cos \bar{\delta} - \sin \vartheta_0 \sin \bar{\delta}$, und man hat bei Berücksichtigung der Glieder erster Ordnung

$$\cos \bar{\vartheta} = \cos \vartheta_0 - \sin \vartheta_0 \operatorname{arc} \bar{\delta},$$

so dass

$$9) \operatorname{arc}(\bar{\delta}) = \operatorname{arc}(\bar{\vartheta} - \vartheta_0) = \frac{\sin \vartheta_0}{2m} = \frac{2 Ge \mathfrak{I}r \sin \vartheta_0}{\gamma_z^2 \mathfrak{I}r_z^2}$$

ist.

Der Winkel ϑ vermag demnach die Grenzen ϑ_0 und $\bar{\vartheta}$ nicht zu überschreiten.

Setzt man allgemein $\vartheta = \vartheta_0 + \delta$, so dass also δ in den Grenzen 0 und $\bar{\delta}$ liegt, so folgt aus Gleichung 7) gemäss $\cos(\vartheta - \delta)$
 $= \cos \vartheta_0$

$$10) \varphi_y = \frac{\gamma_z \mathfrak{I}r_z}{\mathfrak{I}r} \cdot \operatorname{arc} \delta$$

d. h. man hat

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{b} = \frac{4\pi^2 \cdot \mathfrak{I}r^2}{\gamma_z^2 \cdot \mathfrak{I}r_z^2}$$

und

$$T = \frac{2\pi \mathfrak{I}r}{\gamma_z \mathfrak{I}r_z}$$

Führt man die Werthe von r und T in Gleichung 12 b) ein, so wird diese in sich befriedigt, es ist also nach Gleichung 12 a)

$$13) \quad \text{arc } \delta = \frac{Ge \mathfrak{I}r \sin \vartheta_0}{\gamma_z^2 \mathfrak{I}r_z^2} \left[1 - \cos \left(\frac{\gamma_z \mathfrak{I}r_z}{\mathfrak{I}r} \cdot t \right) \right].$$

Bei der gewählten Annäherung entspricht also die Veränderlichkeit von δ bzw. ϑ thatsächlich einer harmonischen Schwingung von der Amplitude r und der Schwingungsdauer T .

Damit ist auch φ_y bestimmt, man hat

$$14) \quad \varphi_y = \frac{\gamma_z \mathfrak{I}r_z}{\mathfrak{I}r} \cdot \text{arc } \delta = \frac{Ge \sin \vartheta_0}{\gamma_z \mathfrak{I}r_z} \left[1 - \cos \left(\frac{\gamma_z \mathfrak{I}r_z}{\mathfrak{I}r} \cdot t \right) \right].$$

Aus φ_y lässt sich leicht die Winkelgeschwindigkeit φ_v für die Verticale OV ableiten, man hat

$$\varphi_v = \frac{\varphi_y}{\sin \vartheta} = \frac{Ge}{\gamma_z \mathfrak{I}r_z} \cdot \frac{\sin \vartheta_0}{\sin \vartheta} \left[1 - \cos \left(\frac{\gamma_z \mathfrak{I}r_z}{\mathfrak{I}r} \cdot t \right) \right].$$

Da ϑ nur in den engen Grenzen ϑ_0 und $\bar{\vartheta}$ schwankt, so erhält man eine brauchbare Annäherung, wenn man in diesem Ausdrücke $\sin \vartheta$ gegen $\sin \vartheta_0$ forthebt, d. h. man hat

$$15) \quad \varphi_v = \frac{Ge}{\gamma_z \mathfrak{I}r_z} \left[1 - \cos \left(\frac{\gamma_z \mathfrak{I}r_z}{\mathfrak{I}r} \cdot t \right) \right]$$

als Winkelgeschwindigkeit der Kreiselachse um die Verticale OV . Projicirt man OZ auf die Horizontalebene, so ist der Winkelweg $\text{arc } \eta$ dadurch gegeben, das φ_v seine Ableitung ist, d. h. man hat

$$16) \quad \text{arc } \eta = \frac{Ge}{\gamma_z \mathfrak{I}r_z} \left[t - \frac{\mathfrak{I}r}{\gamma_z \mathfrak{I}r_z} \sin \left(\frac{\gamma_z \mathfrak{I}r_z}{\mathfrak{I}r} \cdot t \right) \right] + C,$$

wobei C eine Constante bedeutet.

Soll $\eta = 0$ sein für $t = 0$, so ist $C = 0$ zu setzen.

Zeichnet man irgend einen Punkt, z. B. den Schwerpunkt auf der Horizontalprojection der Kreiselachse aus, so entsteht in der Horizontalebene ein Bild, wie es Fig. 5 (auf folgender Seite) andeutet.

Setzt man in der Formel für $\text{arc } \bar{\eta}$ bei $C = 0$ einmal $t = 0$ und einmal $t = T$, so erhält man $\text{arc } \bar{\eta}$, entsprechend dem Bahnstücke ABC .

$$\text{Es ist } \text{arc } \bar{\eta} = 2\pi \cdot \frac{Ge \Im r}{\gamma_z^2 \Im r_z^2}.$$

Die Anzahl (n) der Schwankungen der Kreiselachse, wie ABC , welche auf eine volle Umdrehung dieser Achse fallen, beträgt

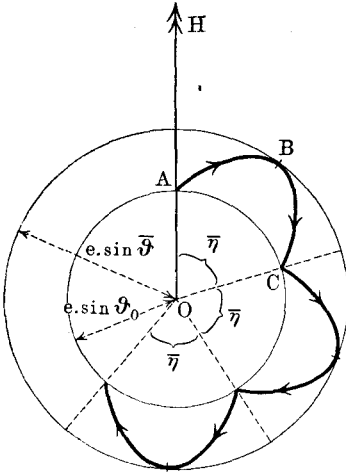
$$n = \frac{2\pi}{\text{arc } \bar{\eta}} = \frac{\gamma_z^2 \Im r_z^2}{Ge \Im r}.$$

Da $\text{arc } \bar{\eta}$ in der Zeit T beschrieben wird, so erfordert ein voller Umgang der Achse die Zeit

$$\Theta = \frac{2\pi}{\text{arc } \bar{\eta}} \cdot T = \frac{\Im r_z}{Ge} \cdot \gamma_z \cdot 2\pi.$$

Die durchschnittliche Winkelgeschwindigkeit dieses Umganges

Fig. 5.



ist also $\frac{Ge}{\Im r_z \gamma_z}$.

Man bemerkt leicht, dass die zuletzt erhaltenen Formeln bei der gewählten Art der Annäherung von ϑ_0 unabhängig sind.

Der Sinn von γ_z und φ_v stimmt überein, d. h. für einen Beschauer, der von oben längs der Achsen ZO und VO blickt, ist für beide Achsen entweder Uhrzeigerdrehung vorhanden oder deren Gegenbewegung; es folgt dies unmittelbar aus den Formeln 14) und 15).

Ein Kreisel, welcher seine Bewegung mit einem grossen Werthe von γ_z beginnt, beschreibt langsam (vergl. Θ) einen Kegel mit vielen (vergl. n), aber kleinen (vergl. $\text{arc } \bar{\eta}$) Einbuchtungen. Die Reibungen, welche durch die Befestigung und den Luftwiderstand hervorgerufen werden, verändern langsam den Werth von γ_z , so dass die Umgänge von OZ mit der Zeit rascher und die Einbuchtungen seltener, aber grösser werden, bis schliesslich ein Umfallen des Kreisels eintritt.

Da φ_v und $\text{arc } \eta$ proportional sind zu e , so verschwinden diese Grössen für $e = 0$, d. h. für den Fall, dass der Schwerpunkt des Kreisels mit O zusammenfällt.

Für eine senkrechte Anfangsstellung ($\vartheta_0 = 0$) folgt, wie die Rechnung zu Gleichung 8) zeigt,

$$\cos \vartheta = m \pm (m - 1)$$

und demnach $\cos \bar{\vartheta} = +1$ oder $\bar{\vartheta} = \vartheta_0$, d. h. hier sind für die Achse überhaupt keine Schwankungen möglich.

Dies zeigt auch die Formel 13), welche $\text{arc } \delta = 0$ liefert. Demnach ist auch $\varphi_y = 0$, gemäss Formel 14), und damit verlieren Formel 15) und ihre Folgerungen für diesen Fall jede Bedeutung.

§. 4.

Man sieht, dass die hier gegebene elementare Behandlung der Kreiselbewegung im Wesentlichen alle Erscheinungen beschreibt, welche auch bei einer genaueren Behandlung zur Darstellung kommen.

Die strengen Gleichungen 5) und 6), welche den Ausgangspunkt bilden, ersetzen das System der drei Euler'schen Gleichungen, von denen man sonst auszugehen pflegt, vollständig, und machen eine erste Integration jener Gleichungen überflüssig.

Vergleicht man die Gleichungen 5) und 6) mit den Gleichungen 1) und 4), welche zu ihrer Herleitung dienten, so sieht man, dass die besonderen Bedingungen $\gamma_x = 0$, $\gamma_y = 0$ und $\varphi_z = \gamma_z$ eine wesentliche Erleichterung für die Behandlung bilden.

BEITRÄGE
ZUR
THEORIE DES POTENTIALS
GALVANISCHER STRÖME.

VON
HEINRICH WEBER
IN BRAUNSCHWEIG.

Unter den verschiedenen Stromcurven, welche lineare galvanische Ströme besitzen können, ist der Kreis die einfachste und wichtigste. Im Folgenden soll zunächst das Potential eines Kreisstromes in einer allgemeinen Gestalt entwickelt werden, welche die besonderen Formen, in denen das Potential unter verschiedenen Annahmen erscheint, als specielle Fälle in sich einschliesst.

Das Potential eines linearen Stromes, welches im Allgemeinen eine vieldeutige Function ist, kann durch Einführung einer beliebigen „Stromfläche“, welche die Stromcurve zur Begrenzung hat, zu einer eindeutigen umgewandelt werden. Aber auch in dem letzteren Falle kommen dem Potentiale je nach Wahl der Stromfläche im Allgemeinen verschiedene Werthe in einem Punkte zu, die sich jedoch nur durch eine Constante von einander unterscheiden können. Legt man nämlich durch einen und denselben Strom zwei verschiedene Stromflächen, die sich nicht durchschneiden, und sind V und V' die diesen Stromflächen entsprechenden Potentiale in einem und demselben Punkte $(\xi \eta \zeta)$, so hat man, da die Kraftcomponenten sich im Raume stetig ändern und von der Art der Stromfläche gänzlich unabhängig sind,

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} = \frac{\partial V'}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial V}{\partial \eta} = \frac{\partial V'}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial V}{\partial \zeta} = \frac{\partial V'}{\partial \zeta}.$$

Durch Multiplication dieser Gleichungen mit $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ und nachherige Addition ergibt sich

$$dV = dV'$$

und hiernach

$$V = V' + \text{Const.}$$

Die Constante ist leicht zu bestimmen mit Hülfe des von Gauss gegebenen Ausdruckes für das Potential eines linearen Stromes von der Intensität i gemessen in elektromagnetischem Maasse

$$V = \pm i\omega,$$

Rechten hat. Dabei wird unter „positiver Normale“ die Richtung von Fuss zu Kopf einer Person verstanden, welche sich auf der Kreisebene so aufstellt, dass der Strom von rechts über vorn nach links an ihr vorbei fliesst.

In dem Abstand ξ vom Anfangspunkt nehmen wir auf der X -Achse einen Punkt M an und machen denselben zum Mittelpunkt einer durch die Kreisperipherie gelegten Kugelfläche. Derjenige Theil der Kugelfläche, welcher auf der positiven Seite des Kreisstromes gelegen ist, soll zur Stromfläche angenommen werden. Ferner bilde M den Anfangspunkt eines Polarcoordinatensystems, dessen Achse MX sei, und dessen Fundamentalebene die XY -Ebene bilde. (rtv) seien die Polarcoordinaten eines Peripheriepunktes des Kreises, $(\varrho \vartheta \varphi)$ diejenigen des Einheitspoles.

Nach den obigen Ausführungen ergibt sich dann, wenn das Potential des Stromes mit der Kreisebene als Stromfläche durch V , dasjenige mit der Kugelfläche als Stromfläche durch V' bezeichnet wird,

$$(1) \quad \text{für } \varrho > r \quad V = V'$$

$$\text{für } \varrho < r \text{ und } \begin{cases} \xi + \varrho \cos \vartheta > 0 & V = 4\pi i + V' \\ \xi + \varrho \cos \vartheta < 0 & V = V' \end{cases}$$

oder indem man im zweiten Falle die beiden Specialfälle zusammenfasst

$$(2) \quad \text{für } \varrho < r \quad V = 2\pi i \left(1 + \frac{\xi + \varrho \cos \vartheta}{\sqrt{(\xi + \varrho \cos \vartheta)^2}} \right) + V'.$$

Die Beziehungen (1) und (2) haben auch noch Geltung, wenn ξ einen negativen Werth besitzt, d. h. der Punkt M auf der negativen Seite der Kreisebene gelegen ist.

Das Potential V' ist mehrfach nach Kugelfunctionen entwickelt worden¹⁾. Setzt man, wie üblich, $\cos t = m$, $\cos \vartheta = \mu$, so ist

¹⁾ F. Neumann, Vorlesungen über die Theorie des Magnetismus, herausgegeben von C. Neumann, Leipzig 1881, S. 91 und 92. J. C. Maxwell, Lehrbuch der Elektrizität und des Magnetismus, deutsch von Weinstein, Berlin 1883, Bd. II, S. 412. E. Mascart und J. Joubert, Lehrbuch der Elektrizität und des Magnetismus, deutsch von Levy, Berlin 1888, Bd. II, S. 134.

$$\varrho < r \quad V' = -2\pi i \left\{ 1 - m + (1 - m^2) \sum_1^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\varrho}{r} \right)^n P_n(\mu) \frac{dP_n(m)}{dm} \right\}$$

$$\varrho > r \quad V' = 2\pi i (1 - m^2) \sum_1^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{r}{\varrho} \right)^{n+1} P_n(\mu) \frac{dP_n(m)}{dm}.$$

Nach (2) und (1) ergibt sich daher für das Potential des Stromes mit der Kreisebene als Stromfläche

$$\begin{aligned} \varrho < r \quad V &= 2\pi i \left\{ \frac{\xi + \varrho \cos \vartheta}{\sqrt{(\xi + \varrho \cos \vartheta)^2}} \right. \\ \text{I) } &+ m - (1 - m^2) \sum_1^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\varrho}{r} \right)^n P_n(\mu) \frac{dP_n(m)}{dm} \left. \right\} \end{aligned}$$

$$\varrho > r \quad V = 2\pi i (1 - m^2) \sum_1^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{r}{\varrho} \right)^{n+1} P_n(\mu) \frac{dP_n(m)}{dm}$$

oder ausgeführt, da $m = -\frac{\xi}{r}$, $\mu = \cos \vartheta$, $r = \sqrt{R^2 + \xi^2}$, wenn

R den Radius des Kreises bedeutet:

$$\begin{aligned} (3) \quad \varrho < r \quad V &= 2\pi i \left\{ \frac{\xi + \varrho \cos \vartheta}{\sqrt{(\xi + \varrho \cos \vartheta)^2}} - \frac{\xi}{r} \right. \\ &- \frac{R^2}{r^2} \left[\frac{\varrho}{r} \cos \vartheta - \left(\frac{1 \cdot 3}{2!} \right)^2 \left(\frac{\varrho}{r} \right)^2 \frac{\xi}{r} \left(\cos^2 \vartheta - \frac{1}{3} \right) \right. \\ &+ \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3!} \right)^2 \left(\frac{\varrho}{r} \right)^3 \left(\left(\frac{\xi}{r} \right)^2 - \frac{1}{5} \right) \left(\cos^3 \vartheta - \frac{3}{5} \cos \vartheta \right) \\ &- \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{4!} \right)^2 \left(\frac{\varrho}{r} \right)^4 \left(\left(\frac{\xi}{r} \right)^3 - \frac{3}{7} \frac{\xi}{r} \right) \left(\cos^4 \vartheta - \frac{6}{7} \cos^2 \vartheta + \frac{3}{35} \right) \\ &+ \dots \left. \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad \varrho > r \quad V &= 2\pi i \left(\frac{R}{\varrho} \right)^2 \left\{ \frac{1}{2} \cos \vartheta - \left(\frac{1 \cdot 3}{2!} \right)^2 \cdot \frac{2}{3} \frac{r}{\varrho} \cdot \frac{\xi}{r} \left(\cos^2 \vartheta - \frac{1}{3} \right) \right. \\ &+ \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3!} \right)^2 \cdot \frac{3}{4} \left(\frac{r}{\varrho} \right)^2 \left(\left(\frac{\xi}{r} \right)^2 - \frac{1}{5} \right) \left(\cos^3 \vartheta - \frac{3}{5} \cos \vartheta \right) \\ &- \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{4!} \right)^2 \cdot \frac{4}{5} \left(\frac{r}{\varrho} \right)^3 \left(\left(\frac{\xi}{r} \right)^3 - \frac{3}{7} \frac{\xi}{r} \right) \left(\cos^4 \vartheta - \frac{6}{7} \cos^2 \vartheta + \frac{3}{35} \right) \\ &+ \dots \left. \right\} \end{aligned}$$

Aus dem allgemeinen Falle ergibt sich leicht das Potential

in Specialfällen. Liegt der Einheitspol auf der Kreisachse, so braucht man denselben nur mit dem Punkte M zusammenfallen zu lassen, d. h. $\varrho = 0$ zu setzen. Man erhält dann

$$(5) \quad V = 2\pi i \left\{ \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2}} - \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + R^2}} \right\}.$$

Lässt man den Einheitspol in die Achse fallen, aber jenseits oder diesseits von M , so braucht man nur $\vartheta = 0$ oder $\vartheta = \pi$ zu setzen. Die erste der Gleichungen (I) ergibt dann

$$\varrho < r \quad V = 2\pi i \left\{ \frac{\xi \pm \varrho}{\sqrt{(\xi \pm \varrho)^2}} + m - (1 - m^2) \sum_1^{\infty} \frac{(\pm 1)^n}{n} \left(\frac{\varrho}{r}\right)^n \frac{dP_n(m)}{dm} \right\}$$

unter Berücksichtigung, dass

$$m = -\frac{\xi}{r}, \quad r^2 = R^2 + \xi^2$$

$$\frac{1 - m^2}{n} \frac{dP_n(m)}{dm} = P_{n-1}(m) - m P_n(m)$$

und

$$\sum_0^{\infty} (\pm 1)^n \left(\frac{\varrho}{r}\right)^n P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{1 \mp 2 \frac{\varrho m}{r} + \left(\frac{\varrho}{r}\right)^2}}$$

ist, folgt

$$V = 2\pi i \left\{ \frac{\xi \pm \varrho}{\sqrt{(\xi \pm \varrho)^2}} - \frac{\xi \pm \varrho}{\sqrt{R^2 + (\xi \pm \varrho)^2}} \right\}$$

in Uebereinstimmung mit (5), wenn daselbst $\xi \pm \varrho$ für ξ gesetzt wird. Zu demselben Ausdrucke gelangt man im Falle $\varrho > r$, indem man von der Formel

$$\frac{1 - m^2}{n + 1} \frac{dP_n(m)}{dm} = m P_n(m) + P_{n+1}(m)$$

Gebrauch macht.

Lässt man den Anfangspunkt der Polarcoordinaten M mit dem Kreismittelpunkt zusammenfallen, so ist $m = 0$, und man erhält für das Potential eines Kreisstromes mit der Kreisebene als Stromfläche, wenn der Anfangspunkt M der Polarcoordinaten mit dem Kreismittelpunkte zusammenfällt

$$\begin{aligned} \varrho < R \quad V &= 2\pi i \left\{ \frac{\cos \vartheta}{\sqrt{\cos^2 \vartheta}} \right. \\ \text{II) } &\quad \left. - \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \frac{1 \cdot 3 \dots 2n+1}{n! 2^n} \left(\frac{\varrho}{R}\right)^{2n+1} P_{2n+1}(\mu) \right\} \end{aligned}$$

$$\text{II) } \varrho > R \quad V = 2\pi i \left(\frac{R}{\varrho}\right)^2 \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n 1.3..2n+1}{2n+2} \frac{1}{n! 2^n} \left(\frac{R}{\varrho}\right)^{2n} P_{2n+1}(\mu)$$

oder ausgeführt¹⁾

$$\begin{aligned} (6) \quad \varrho < R \quad V = 2\pi i \left\{ \frac{\cos \vartheta}{\sqrt{\cos^2 \vartheta}} \right. \\ - \frac{\varrho}{R} \cos \vartheta \left[1 + \left(\frac{1.3}{1.2}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{\varrho}{R}\right)^2 \left(1 - \frac{5}{3} \cos^2 \vartheta\right) \right. \\ + \left(\frac{1.3.5}{2! 2^2}\right)^2 \cdot \frac{1}{5} \left(\frac{\varrho}{R}\right)^4 \left(1 - \frac{14}{3} \cos^2 \vartheta + \frac{21}{5} \cos^4 \vartheta\right) \\ + \left(\frac{1.3.5.7}{3! 2^3}\right)^2 \cdot \frac{1}{7} \left(\frac{\varrho}{R}\right)^6 \left(1 - 9 \cos^2 \vartheta + \frac{99}{5} \cos^4 \vartheta - \frac{429}{35} \cos^6 \vartheta\right) \\ + \dots \left. \right] \Big\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (7) \quad \varrho > R \quad V = 2\pi i \left(\frac{R}{\varrho}\right)^2 \cos \vartheta \left\{ \frac{1}{2} + \left(\frac{1.3}{1.2}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{R}{\varrho}\right)^2 \left(1 - \frac{5}{3} \cos^2 \vartheta\right) \right. \\ + \left(\frac{1.3.5}{2! 2^2}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} \left(\frac{R}{\varrho}\right)^4 \left(1 - \frac{14}{3} \cos^2 \vartheta + \frac{21}{5} \cos^4 \vartheta\right) \\ + \left(\frac{1.3.5.7}{3! 2^3}\right)^2 \cdot \frac{1}{8} \left(\frac{R}{\varrho}\right)^6 \left(1 - 9 \cos^2 \vartheta + \frac{99}{5} \cos^4 \vartheta - \frac{429}{35} \cos^6 \vartheta\right) \\ + \dots \left. \right\} \end{aligned}$$

In Folge der Symmetrie besitzen alle Punkte mit derselben Abscisse ξ und demselben zur Kreisachse senkrechten Abstände dasselbe Potential. Setzt man in (I) $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$, d. i. $\mu = 0$, so erhält man für das Potential eines Kreisstromes mit der Kreisebene als Stromfläche, wenn die Lage des Einheitspoles durch die Abscisse ξ und durch den zur Kreisachse senkrechten Abstand ϱ bestimmt wird,

$$\begin{aligned} \varrho < r \quad V = 2\pi i \left\{ \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2}} + m \right. \\ \text{(III)} \quad \left. - (1 - m^2) \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n 1.3..2n-1}{2n} \frac{1}{n! 2^n} \left(\frac{\varrho}{r}\right)^{2n} \frac{dP_{2n}(m)}{dm} \right\} \end{aligned}$$

¹⁾ Die vorhergehende Formel findet sich entwickelt E. Mascart und J. Joubert, Lehrbuch der Elektrizität und des Magnetismus, Bd. II, S. 127, Art. 768.

$$(III) \quad \varrho > r \quad V = 2\pi i (1 - m^2) \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \\ \frac{1 \cdot 3 \dots 2n-1}{n! 2^n} \left(\frac{r}{\varrho}\right)^{2n+1} \frac{d P_{2n}(m)}{dm}$$

oder ausgeführt

$$(8) \quad \varrho < r \quad V = 2\pi i \left\{ \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2}} - \frac{\xi}{r} \right. \\ \left. - \left(\frac{R}{r}\right)^2 \left(\frac{\xi}{r}\right) \left(\frac{\varrho}{r}\right)^2 \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 3 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2! 2^2}\right)^2 \cdot 5 \left(\frac{\varrho}{r}\right)^2 \left(1 - \frac{7}{3} \left(\frac{\xi}{r}\right)^2\right) \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3! 2^3}\right)^2 \cdot 7 \left(\frac{\varrho}{r}\right)^4 \left(1 - 6 \left(\frac{\xi}{r}\right)^2 + \frac{33}{5} \left(\frac{\xi}{r}\right)^4\right) + \dots \right] \right\}$$

$$(9) \quad \varrho > r \quad V = 2\pi i \left(\frac{R}{\varrho}\right)^2 \left(\frac{\xi}{\varrho}\right) \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2! 2^2}\right)^2 \cdot 4 \left(\frac{r}{\varrho}\right)^2 \left(1 - \frac{7}{3} \left(\frac{\xi}{r}\right)^2\right) \right. \\ \left. + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3! 2^3}\right)^2 \cdot 6 \left(\frac{r}{\varrho}\right)^4 \left(1 - 6 \left(\frac{\xi}{r}\right)^2 + \frac{33}{5} \left(\frac{\xi}{r}\right)^4\right) + \dots \right\},$$

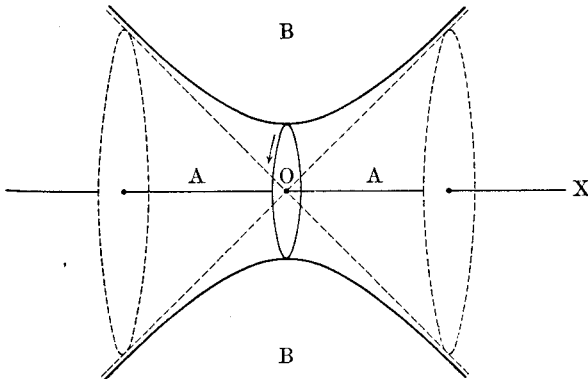
wobei $r^2 = R^2 + \xi^2$ ist.

Construirt man die gleichseitige Hyperbel Fig. 2, deren Gleichung durch

$$\frac{\varrho^2}{R^2} - \frac{\xi^2}{R^2} = 1$$

gegeben ist, und lässt dieselbe um ihre Nebenachse rotiren, so

Fig. 2.



entsteht alsdann ein einschaliges gleichseitiges Rotationshyperboloid. Für alle Punkte, welche innerhalb des Raumes A, das ist zwischen den Hyperboloidflächen gelegen sind, ist $\varrho < r$, für

alle Punkte dagegen, welche in dem schalenförmigen Raum B gelegen sind, ist $\varrho > r$. Man hat daher, so lange der Einheitspol im Raume A gelegen ist, die Formel (8), so lange er im Raume B liegt, die Formel (9) zur Anwendung zu bringen.

Setzt man einmal $\xi = +a$, das andere Mal $\xi = -a$ und lässt a bis zu null abnehmen, so ergibt sich

$$V_{+0} - V_{-0} = \begin{cases} 4\pi i & \text{für } \varrho < R \\ 0 & \text{„ } \varrho > R \end{cases}$$

Zurückführung des Potentials eines Kreisstromes mit der Kreisebene als Stromfläche auf das Potential einer mit magnetischer Masse von der Dichte 1 belegten Kreisfläche.

Obgleich das Potential eines Kreisstromes mit der Kreisebene als Stromfläche sich auf dem vorher eingeschlagenen Wege am einfachsten ergibt, empfiehlt es sich doch, dasselbe Potential auf einen zweiten, weit umständlicheren Weg abzuleiten, weil die dabei gewonnenen Formeln eine nützliche Anwendung finden bei Herstellung des Potentials von Spulen und Rollen.

Aus dem bekannten Ausdruck für das Potential eines Stromes

$$V = i \int \frac{\partial \left(\frac{1}{e} \right)}{\partial n} d\omega,$$

wo e die Entfernung eines Flächenelementes $d\omega$ von dem Einheitspole, n die positive Normale auf dem Flächenelemente bedeutet, und i in elektromagnetischem Maasse gemessen wird, ergibt sich unmittelbar

$$V = i \frac{\partial}{\partial n} \int \frac{d\omega}{e} = i \frac{\partial U}{\partial n},$$

wo U das Potential der mit magnetischer Masse von der Dichte 1 belegten Stromfläche auf den Einheitspol bezeichnet. In unserem speciellen Falle ist, wenn Fig. 3 R den Radius der Kreisfläche, (rtv) und $(\varrho \vartheta \varphi)$ die Polarcoordinaten des Flächenelementes $d\omega$ und des Einheitspoles bezüglich eines Polarcoordinatensystems mit dem Pole M und der Kreisachse als Achse bedeuten und mit λ der Abstand des Elementes $d\omega$ vom Kreismittelpunkte bezeichnet wird,

$$U = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\lambda d\lambda dv}{e}.$$

Wir construiren mit M als Mittelpunkt, Fig. 3, eine Kugelfläche, welche die Kreisebene in ihrem Mittelpunkte O berührt, und eine zweite concentrische Kugelfläche, welche die Kreisperipherie in sich aufnimmt, und unterscheiden die drei Fälle:

1. Der Einheitspol liegt innerhalb der Kugel mit dem Radius ξ . Dann ist

$$\varrho < \sqrt{\xi^2}.$$

2. Der Einheitspol liegt ausserhalb der Kugel mit dem Radius $\sqrt{R^2 + \xi^2}$. Dann ist

$$\varrho > \sqrt{R^2 + \xi^2}.$$

3. Der Einheitspol liegt zwischen den beiden Kugelflächen. Dann ist $\sqrt{R^2 + \xi^2} > \varrho > \sqrt{\xi^2}$.

Diesen drei Fällen entsprechend werde das Potential U durch U_1, U_2, U_3 bezeichnet. Hierbei ist für $\xi \sqrt{\xi^2}$ geschrieben worden, weil M sowohl auf der positiven wie auf der negativen Seite der Kreisebene liegen kann.

Erster Fall. Bezeichnet man mit γ den Winkel, welchen die Radienvectoren r und ϱ mit einander einschliessen, so findet sich

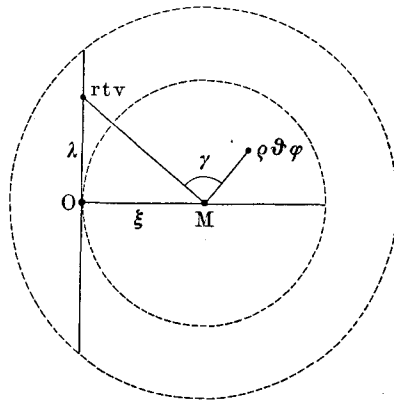
$$\frac{1}{e} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{\varrho}{r} \cos \gamma + \left(\frac{\varrho}{r}\right)^2}} = \frac{1}{r} + \sum_1^{\infty} \frac{\varrho^n}{r^{n+1}} P_n(\cos \gamma)$$

und hiernach

$$U_1 = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\lambda d\lambda dv}{\sqrt{\lambda^2 + \xi^2}} + \sum_1^{\infty} \varrho^n \int_0^R \frac{\lambda d\lambda}{(\lambda^2 + \xi^2)^{\frac{n+1}{2}}} \int_0^{2\pi} P_n(\cos \gamma) dv$$

Festschrift.

Fig. 3.



oder ¹⁾

$$U_1 = 2\pi \left\{ \sqrt{R^2 + \xi^2} - \sqrt{\xi^2} + \sum_1^\infty \varrho^n P_n(u) \int_0^R \frac{\lambda d\lambda}{(\lambda^2 + \xi^2)^{\frac{n+1}{2}}} P_n(m) \right\}$$

Man hat nun

$$m = -\frac{\xi}{\sqrt{\lambda^2 + \xi^2}} \quad dm = \frac{\xi \lambda d\lambda}{(\lambda^2 + \xi^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\lambda d\lambda}{(\lambda^2 + \xi^2)^{\frac{n+1}{2}}} = (-1)^n \frac{m^{n-2}}{\xi^{n-1}} dm,$$

ferner ist

$$\text{für } \lambda = 0 \quad m = -\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2}} = m_0,$$

$$\text{für } \lambda = R \quad m = -\frac{\xi}{\sqrt{R^2 + \xi^2}} = m_2$$

und demnach

$$U_1 = 2\pi \left\{ \sqrt{R^2 + \xi^2} - \sqrt{\xi^2} + \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{\xi^{n-1}} \varrho^n P_n(u) \int_{m_0}^{m_2} m^{n-2} P_n(m) dm \right\}$$

Beachtet man, dass für $n > 1$

$$\int m^{n-2} P_n(m) dm = -m^{n-1} \cdot \frac{1 - m^2}{n \cdot n - 1} \frac{dP_{n-1}(m)}{dm} + \text{Const.}$$

ist ²⁾, so findet sich durch Integration von m_0 bis zu einem be-

¹⁾ Es ist

$$P_n(\cos \gamma) = P_n(u) P_n(m) + \sum_{j=1}^n \frac{2 (V1-u^2)^j (V1-m^2)^j}{(n-j+1)(n-j+2) \dots (n+j)} \frac{dj P_n(u)}{du^j} \cdot \frac{dj P_n(m)}{dm^j} \cos j(v - \varphi)$$

und folglich da

$$\int_0^{2\pi} \cos jv dv = 0 \quad \int_0^{2\pi} \sin jv dv = 0$$

$$\int_0^{2\pi} P_n(\cos \gamma) dv = 2\pi P_n(u) P_n(m).$$

²⁾ Aus der bekannten Formel

$$P_n(m) = m P_{n-1}(m) - \frac{1 - m^2}{n} \frac{dP_{n-1}(m)}{dm}$$

folgt durch Multiplication mit m^{n-2}

liebigen Werth m'

$$\int_{m_1}^{m'} m^{n-2} P_n(m) dm = -m'^{n-1} \cdot \frac{1 - m'^2}{n \cdot n - 1} \frac{dP_{n-1}(m')}{dm'}$$

oder auch

$$(1) \quad \int_{m_0}^{m'} m^{n-2} P_n(m) dm = m'^{n-1} \int_{m_0}^{m'} P_{n-1}(m) dm.$$

In dieser letzten Form gilt die Formel auch für $n = 1$, wovon man sich direct überzeugen kann.

Da ferner

$$\frac{m_2^{n-1}}{\xi^{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{(\sqrt{R^2 + \xi^2})^{n-1}}$$

ist, so ergibt sich schliesslich

$$(2) \quad U_1 = 2\pi \left\{ \sqrt{R^2 + \xi^2} - \sqrt{\xi^2} - \sqrt{R^2 + \xi^2} \sum_1^{\infty} \left(\frac{\varrho}{\sqrt{R^2 + \xi^2}} \right)^n P_n(\mu) \int_{m_0}^{m_2} P_{n-1}(m) dm \right\}.$$

Zweiter Fall. Ist $\varrho > \sqrt{R^2 + \xi^2}$, so folgt wie vorher

$$U_2 = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\lambda d\lambda dv}{e},$$

wo aber jetzt

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{\varrho} \frac{1}{\sqrt{1 - 2 \frac{r}{\varrho} \cos \gamma + \left(\frac{r}{\varrho}\right)^2}} = \frac{1}{\varrho} + \sum_1^{\infty} \frac{r^n}{\varrho^{n+1}} P_n(\cos \gamma)$$

$$m^{n-2} P_n(m) = \frac{m^{n-2}}{n \cdot n - 1} \left(n \cdot n - 1 \cdot m P_{n-1}(m) - (n-1) (1 - m^2) \frac{dP_{n-1}(m)}{dm} \right)$$

oder weil

$$\begin{aligned} n \cdot n - 1 P_{n-1}(m) &= -\frac{d}{dm} \left[(1 - m^2) \frac{dP_{n-1}(m)}{dm} \right] \\ m^{n-2} P_n(m) &= -\frac{1}{n \cdot n - 1} \left(m^{n-1} \frac{d}{dm} \left[(1 - m^2) \frac{dP_{n-1}(m)}{dm} \right] \right. \\ &\quad \left. + (n-1) m^{n-2} (1 - m^2) \frac{dP_{n-1}(m)}{dm} \right) \\ &= -\frac{1}{n \cdot n - 1} \frac{d}{dm} \left[m^{n-1} (1 - m^2) \frac{dP_{n-1}(m)}{dm} \right] \end{aligned}$$

woraus die obige Integralformel hervorgeht.

zu setzen ist. Es findet sich alsdann

$$U_2 = 2\pi \left\{ \frac{1}{2} \frac{R^2}{\varrho} + \sum_1^{\infty} \frac{P_n(u)}{\varrho^{n+1}} \int_0^R P_n(m) (\lambda^2 + \xi^2)^{\frac{n}{2}} \lambda d\lambda \right\}.$$

Führt man wieder m an Stelle von λ als Veränderliche ein, so erhält man aus

$$m = -\frac{\xi}{\sqrt{\lambda^2 + \xi^2}}, \quad (\lambda^2 + \xi^2)^{\frac{n}{2}} \lambda d\lambda = -(-1)^n \frac{\xi^{n+2} dm}{m^{n+3}}$$

$$U_2 = 2\pi \left\{ \frac{1}{2} \frac{R^2}{\varrho} - \sum_1^{\infty} \frac{P_n(u)}{\varrho^{n+1}} \xi^{n+2} (-1)^n \int_{m_0}^{m_2} \frac{P_n(m)}{m^{n+3}} dm \right\}.$$

Es ist nun¹⁾

$$\int \frac{P_n(m)}{m^{n+3}} dm = -\frac{1}{n+1 \cdot n+2} \frac{1-m^2}{m^{n+2}} \frac{dP_{n+1}(m)}{dm} + \text{Const.}$$

und daher bei Integration von m_0 bis zu einem beliebigen Werth m'

$$\begin{aligned} (3) \quad \int_{m_0}^{m'} \frac{P_n(m)}{m^{n+3}} dm &= -\frac{1}{n+1 \cdot n+2} \frac{1-m'^2}{m'^{n+2}} \frac{dP_{n+1}(m')}{dm'} \\ &= \frac{1}{m'^{n+2}} \int_{m_0}^{m'} P_{n+1}(m) dm. \end{aligned}$$

¹⁾ Aus der bekannten Formel

$$P_n(m) = m P_{n+1}(m) + \frac{1-m^2}{n+1} \frac{dP_{n+1}(m)}{dm}$$

folgt durch Division mit m^{n+3}

$$\begin{aligned} \frac{P_n(m)}{m^{n+3}} &= \frac{1}{n+1 \cdot n+2 \cdot m^{n+3}} \left(n+1 \cdot n+2 \cdot m P_{n+1}(m) \right. \\ &\quad \left. + (n+2) (1-m^2) \frac{dP_{n+1}(m)}{dm} \right) \\ &= \frac{1}{n+1 \cdot n+2} \left(-\frac{1}{m^{n+2}} \frac{d}{dm} \left[(1-m^2) \frac{dP_{n+1}(m)}{dm} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{n+2}{m^{n+3}} (1-m^2) \frac{dP_{n+1}(m)}{dm} \right) \\ &= -\frac{1}{n+1 \cdot n+2} \frac{d}{dm} \left[\frac{1-m^2}{m^{n+2}} \frac{dP_{n+1}(m)}{dm} \right] \end{aligned}$$

woraus die obige Integralformel folgt.

Da ferner

$$\frac{\xi^{n+2}}{m_2^{n+2}} = (-1)^n (\sqrt{R^2 + \xi^2})^{n+2}$$

ist, so ergibt sich

$$(4) \quad U_2 = 2\pi \left\{ \frac{1}{2} \frac{R^2}{\varrho} - \sqrt{R^2 + \xi^2} \sum_1^\infty \left(\frac{\sqrt{R^2 + \xi^2}}{\varrho} \right)^{n+1} P_n(u) \int_{m_0}^{m_2} P_{n+1}(m) dm \right\}.$$

Dritter Fall. Ist $\sqrt{R^2 + \xi^2} > \varrho > \sqrt{\xi^2}$, so zerlegen wir das Integral

$$U_3 = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\lambda d\lambda dv}{e}$$

bezüglich λ in zwei Integrale mit den Grenzen 0 und $\sqrt{\varrho^2 - \xi^2}$, $\sqrt{\varrho^2 - \xi^2}$ und R , dann ist

$$U_3 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{\varrho^2 - \xi^2}} \frac{\lambda d\lambda dv}{e} + \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{\varrho^2 - \xi^2}}^R \frac{\lambda d\lambda dv}{e}.$$

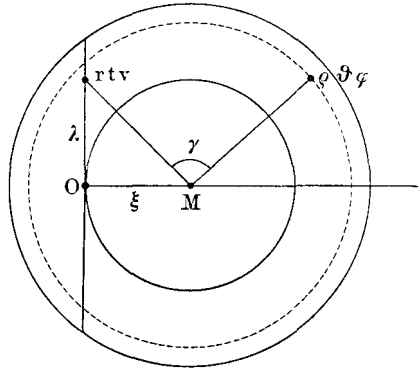
In dem ersten Integral, Fig. 4, ist $r = \sqrt{\lambda^2 + \xi^2} < \varrho$, in dem zweiten dagegen $r > \varrho$. Wir setzen daher in dem ersten Integral

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{\varrho} \frac{1}{\sqrt{1 - 2 \frac{r}{\varrho} \cos \gamma + \left(\frac{r}{\varrho}\right)^2}},$$

in dem zweiten Integral

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - 2 \frac{\varrho}{r} \cos \gamma + \left(\frac{\varrho}{r}\right)^2}}$$

Fig. 4.



und erhalten dann

$$U_3 = 2\pi \left\{ \frac{1}{2} \frac{\varrho^2 + \xi^2}{\varrho} + \sum_1^{\infty} \frac{P_n(\mu)}{\varrho^{n+1}} \int_0^{\sqrt{\varrho^2 - \xi^2}} P_n(m) (\lambda^2 + \xi^2)^{\frac{n}{2}} \lambda d\lambda \right. \\ \left. + \sqrt{R^2 + \xi^2} - \varrho + \sum_1^{\infty} P_n(\mu) \varrho^n \int_{\sqrt{\varrho^2 - \xi^2}}^R P_n(m) \frac{\lambda d\lambda}{(\lambda^2 + \xi^2)^{\frac{n+1}{2}}} \right\}$$

oder, indem man mit Hülfe der Beziehung

$$m = -\frac{\xi}{\sqrt{\lambda^2 + \xi^2}}$$

λ durch m ausdrückt und zur Abkürzung

$$m_0 = -\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2}}, \quad m_1 = -\frac{\xi}{\varrho}, \quad m_2 = -\frac{\xi}{\sqrt{R^2 + \xi^2}}$$

setzt,

$$U_3 = 2\pi \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\varrho^2 + \xi^2}{\varrho} + \sqrt{R^2 + \xi^2} \right. \\ \left. - \sum_1^{\infty} (-1)^n P_n(\mu) \frac{\xi^{n+2}}{\varrho^{n+1}} \int_{m_0}^{m_1} \frac{P_n(m) dm}{m^{n+3}} \right. \\ \left. + \sum_1^{\infty} (-1)^n P_n(\mu) \frac{\varrho^n}{\xi^{n-1}} \int_{m_1}^{m_2} P_n(m) m^{n-2} dm \right\}.$$

Ersetzt man das letzte Integral durch zwei Integrale mit den Grenzen m_0 und m_1 , m_0 und m_2 , so erhält man

$$U_3 = 2\pi \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\varrho^2 + \xi^2}{\varrho} + \sqrt{R^2 + \xi^2} \right. \\ \left. - \sum_1^{\infty} (-1)^n P_n(\mu) \left[\frac{\xi^{n+2}}{\varrho^{n+1}} \int_{m_0}^{m_1} \frac{P_n(m)}{m^{n+3}} dm + \frac{\varrho^n}{\xi^{n-1}} \int_{m_0}^{m_1} P_n(m) m^{n-2} dm \right] \right. \\ \left. + \sum_1^{\infty} (-1)^n P_n(\mu) \frac{\varrho^n}{\xi^{n-1}} \int_{m_0}^{m_2} P_n(m) m^{n-2} dm \right\}.$$

Unter Anwendung der Formeln (1) und (3) wird

$$(5) \quad U_3 = 2 \pi \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\varrho^2 + \xi^2}{\varrho} + \sqrt{R^2 + \xi^2} \right. \\ \left. - \varrho \sum_1^{\infty} P_n(\mu) \int_{m_0}^{m_1} [(P_{n+1}(m) - P_{n-1}(m))] dm \right. \\ \left. - \sqrt{R^2 + \xi^2} \sum_1^{\infty} P_n(\mu) \left(\frac{\varrho}{\sqrt{R^2 + \xi^2}} \right)^n \int_{m_0}^{m_2} P_{n-1}(m) dm \right\}.$$

Nun ist aber ¹⁾

$$\sum_1^{\infty} P_n(\mu) \int_{m_0}^{m_1} [P_{n+1}(m) - P_{n-1}(m)] dm \\ = -\frac{1}{2} \frac{\varrho^2 + \xi^2}{\varrho^2} + \frac{\sqrt{(\xi + \varrho \cos \vartheta)^2}}{\varrho} - \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2}} \cos \vartheta.$$

¹⁾ Diese Formel ergibt sich wie folgt. Bestimmt man nach (5) die Kraftkomponente senkrecht zur Kreisfläche im Punkte $(\varrho \vartheta \varphi)$ $X = -\frac{\partial U_3}{\partial \xi}$ und lässt sodann den Radius R ins Unendliche wachsen, so ergibt sich für die zur Ebene senkrechte Kraftkomponente einer mit magnetischer Masse von der Dichte 1 belegten unendlichen Ebene im Punkte $(\varrho \vartheta \varphi)$

$$X = 2 \pi \left\{ \frac{\xi}{\varrho} - \sum_1^{\infty} P_n(\mu) [P_{n+1}(m_1) - P_{n-1}(m_1)] \right\},$$

welche zugleich die Gesamtkraft bildet. Dieselbe Komponente lässt sich noch auf andere Weise berechnen, indem man vom Punkte $(\varrho \vartheta \varphi)$, der von der Kreisebene den Abstand $\xi + \varrho \cos \vartheta$ besitzt, ein Perpendikel auf die Ebene fällt. Das Potential V in $(\varrho \vartheta \varphi)$ einer Kreisfläche mit dem Radius R' , welche den Fusspunkt des Perpendikels zum Mittelpunkt hat, ist alsdann

$$V = 2 \pi (\sqrt{R'^2 + (\xi + \varrho \cos \vartheta)^2} - V(\xi + \varrho \cos \vartheta)^2).$$

Daraus ergibt sich für die X -Komponente der unendlichen Fläche

$$X = -\left(\frac{\partial V}{\partial \xi}\right)_{R'=\infty} = 2 \pi \frac{\xi + \varrho \cos \vartheta}{V(\xi + \varrho \cos \vartheta)^2}.$$

Setzt man beide Ausdrücke für X einander gleich und ersetzt $-\frac{\xi}{\varrho}$ durch m_1 , so folgt

$$\sum_1^{\infty} P_n(\mu) [P_{n+1}(m_1) - P_{n-1}(m_1)] = -m_1 - \frac{-m_1 + \cos \vartheta}{V(-m_1 + \cos \vartheta)^2}.$$

Multipliziert man den Ausdruck mit dm_1 und integriert zwischen den Grenzen m_0 und m_1 , so wird

und folglich

$$(6) \quad U_3 = 2\pi \left\{ -\sqrt{(\xi + \varrho \cos \vartheta)^2} + \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2}} \varrho \cos \vartheta + \sqrt{R^2 + \xi^2} \right. \\ \left. - \sqrt{R^2 + \xi^2} \sum_1^{\infty} \left(\frac{\varrho}{\sqrt{R^2 + \xi^2}} \right)^n P_n(\mu) \int_{m_0}^{m_2} P_{n-1}(m) dm \right\}.$$

Der Ausdruck U_3 schliesst den früher gefundenen Ausdruck U_1 in sich ein. Es lässt sich nämlich zeigen, wenn die Bedingung $\varrho < \sqrt{\xi^2}$ erfüllt ist, was bei U_1 vorausgesetzt wurde, dass alsdann der Ausdruck U_3 in denjenigen von U_1 übergeht.

Man hat

$$\sqrt{(\xi + \varrho \cos \vartheta)^2} = \sqrt{\xi^2} \sqrt{\left(1 + \frac{\varrho}{\xi} \cos \vartheta\right)^2}.$$

Ist die Bedingung $\varrho < \sqrt{\xi^2}$ erfüllt, so ist $\left(1 + \frac{\varrho}{\xi} \cos \vartheta\right)$ stets eine positive Grösse, folglich ist in diesem Falle

$$\sqrt{(\xi + \varrho \cos \vartheta)^2} = \sqrt{\xi^2} + \frac{\sqrt{\xi^2}}{\xi} \varrho \cos \vartheta = \sqrt{\xi^2} + \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2}} \varrho \cos \vartheta.$$

Führt man diesen Werth in U_3 ein, so ergibt sich U_1 .

Als Resultat der vorhergehenden Betrachtungen erhalten wir daher für das Potential einer mit magnetischer Masse von der Dichte 1 belegten Kreisfläche, wenn die Lage des Einheitspoles durch ξ und $(\varrho \vartheta \varphi)$ festgestellt wird, wobei ξ

$$\sum_1^{\infty} P_n(\mu) \int_{m_0}^{m_1} [P_{n+1}(m_1) - P_{n-1}(m_1)] dm_1 \\ = -\left(\frac{m_1^2}{2} - \frac{m_0^2}{2}\right) + \sqrt{(-m_1 + \cos \vartheta)^2} - \sqrt{(-m_0 + \cos \vartheta)^2} \\ = -\frac{1}{2} \frac{\xi^2 - \varrho^2}{\varrho^2} + \frac{\sqrt{(\xi + \varrho \cos \vartheta)^2}}{\varrho} - \sqrt{\left(\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2}} + \cos \vartheta\right)^2}.$$

Nun ist

$$\sqrt{\left(\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2}} + \cos \vartheta\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{\xi^2}}{\xi} + \cos \vartheta\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{\xi^2}} \sqrt{(\sqrt{\xi^2} + \xi \cos \vartheta)^2},$$

der letzte Ausdruck ist aber, da stets $\sqrt{\xi^2} + \xi \cos \vartheta \geq 0$ ist, gleich $1 + \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2}} \cos \vartheta$. Führt man diesen Werth ein, so ergibt sich die obige Formel.

sowohl positive als negative Werthe annehmen kann, folgende Formeln:

$$(IV) \quad \varrho < \sqrt{R^2 + \xi^2} \quad U = 2\pi \left\{ -\sqrt{\left(\xi + \varrho \cos \vartheta\right)^2} \right. \\ \left. + \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2}} \varrho \cos \vartheta + \sqrt{R^2 + \xi^2} \right. \\ \left. - \sqrt{R^2 + \xi^2} \sum_1^{\infty} \left(\frac{\varrho}{\sqrt{R^2 + \xi^2}} \right)^n P_n(\mu) \int_{m_0}^{m_2} P_{n-1}(m) dm \right\}.$$

$$\varrho > \sqrt{R^2 + \xi^2} \quad U = 2\pi \left\{ \frac{1}{2} \frac{R^2}{\varrho} \right. \\ \left. - \sqrt{R^2 + \xi^2} \sum_1^{\infty} \left(\frac{\sqrt{R^2 + \xi^2}}{\varrho} \right)^{n+1} P_n(\mu) \int_{m_0}^{m_2} P_{n+1}(m) dm \right\}.$$

Diese Formeln lassen sich in weiterer Ausführung schreiben, wenn man beachtet, dass

$$\text{für } n > 0 \int_{m_0}^m P_n(m) dm = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2n-1}{(n+1)!} \left[m^{n+1} - \frac{1}{2} \frac{n+1 \cdot n}{2n-1} m^{n-1} \right. \\ \left. + \frac{1}{2!} \frac{n+1 \cdot n \cdot n-1 \cdot n-2}{2n-1 \cdot 2n-3} m^{n-3} - \dots \right],$$

$$\text{für } n = 0 \int_{m_0}^m P_n(m) dm = m - m_0.$$

Setzen wir zur Abkürzung $\sqrt{R^2 + \xi^2} = r$, so folgt

$$(7) \quad \varrho < r \quad U = 2\pi \left\{ -\sqrt{\left(\xi + \varrho \cos \vartheta\right)^2} + r \right. \\ \left. + \varrho \left[\frac{\xi}{r} \cos \vartheta - \left(\frac{1 \cdot 3}{2!} \right)^2 \cdot \frac{1}{3} \frac{\varrho}{r} \left(\left(\frac{\xi}{r} \right)^2 - 1 \right) \left(\cos^2 \vartheta - \frac{1}{3} \right) \right. \right. \\ \left. + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3!} \right)^2 \cdot \frac{1}{5} \left(\frac{\varrho}{r} \right)^2 \left(\left(\frac{\xi}{r} \right)^3 - \frac{\xi}{r} \right) \left(\cos^3 \vartheta - \frac{3}{5} \cos \vartheta \right) \right. \\ \left. - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{4!} \right)^2 \cdot \frac{1}{7} \left(\frac{\varrho}{r} \right)^3 \left(\left(\frac{\xi}{r} \right)^4 - \frac{6}{5} \left(\frac{\xi}{r} \right)^2 + \frac{1}{5} \right) \left(\cos^4 \vartheta - \frac{6}{7} \cos^2 \vartheta + \frac{3}{35} \right) \right. \\ \left. + \dots \dots \dots \right\}.$$

$$\begin{aligned}
 (8) \quad \varrho > r \quad U = & -2\pi \frac{r^2}{\varrho} \left\{ \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\xi}{r} \right)^2 - 1 \right) - \left(\frac{1}{11} \right)^2 \frac{3}{2 \cdot 3} \frac{r}{\varrho} \left(\left(\frac{\xi}{r} \right)^3 - \frac{\xi}{r} \right) \cos \vartheta \right. \\
 & + \left(\frac{1 \cdot 3}{2!} \right)^2 \cdot \frac{5}{3 \cdot 4} \left(\frac{r}{\varrho} \right)^2 \left(\left(\frac{\xi}{r} \right)^4 - \frac{6}{5} \left(\frac{\xi}{r} \right)^2 + \frac{1}{5} \right) \left(\cos^2 \vartheta - \frac{1}{3} \right) \\
 & - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3!} \right)^2 \frac{7}{4 \cdot 5} \left(\frac{r}{\varrho} \right)^3 \left(\left(\frac{\xi}{r} \right)^5 - \frac{10}{7} \left(\frac{\xi}{r} \right)^3 + \frac{3}{7} \frac{\xi}{r} \right) \left(\cos^3 \vartheta - \frac{3}{5} \cos \vartheta \right) \\
 & + \dots \left. \right\}.
 \end{aligned}$$

Aus den Formeln (IV) lassen sich leicht die Werthe des Potentials ableiten für den Fall, dass der Anfangspunkt des Polarcoordinatensystems $(\varrho \vartheta \varphi)$ mit dem Kreismittelpunkte zusammenfällt.

Setzt man in der ersten Formel für $\varrho < \sqrt{R^2 + \xi^2}$, $\xi = 0$, so findet sich

$$\begin{aligned}
 U = 2\pi \left\{ -\varrho \sqrt{\cos^2 \vartheta} \pm \varrho \cos \vartheta + R \right. \\
 \left. - R \sum_1^{\infty} \left(\frac{\varrho}{R} \right)^n P_n(\mu) \int_{\mp 1}^0 P_{n-1}(m) dm \right\},
 \end{aligned}$$

wo das obere oder untere Vorzeichen zu nehmen ist, je nachdem ξ von der positiven oder negativen Seite aus zu Null übergeht. Sondert man von der Summe die beiden ersten Glieder ab und schreibt in der übrig bleibenden Summe für n : $n+2$, indem man zugleich die Summe von $n=1$ bis $n=\infty$ erstreckt, so findet sich leicht

$$\begin{aligned}
 \varrho < R \quad U = 2\pi R \left\{ 1 - \frac{\varrho}{R} \sqrt{\cos^2 \vartheta} + \frac{1}{2} \left(\frac{\varrho}{R} \right)^2 P_2(\mu) \right. \\
 \left. - \sum_1^{\infty} \left(\frac{\varrho}{R} \right)^{n+2} P_{n+2}(\mu) \int_{\mp 1}^0 P_{n+1}(m) dm \right\}.
 \end{aligned}$$

Desgleichen giebt die zweite Gleichung (IV) für $\xi = 0$

$$\varrho > R \quad U = 2\pi R \left\{ \frac{1}{2} \frac{R}{\varrho} - \sum_1^{\infty} \left(\frac{R}{\varrho} \right)^{n+1} P_n(\mu) \int_{\mp 1}^0 P_{n+1}(m) dm \right\}.$$

Es ist aber für $n > 0$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^0 P_{2n}(m) dm = 0, \quad \int_{-\frac{1}{2}}^0 P_{2n+1}(m) dm = -(-1)^n \frac{1.3.5 \dots 2n-1}{(n+1)! 2^{n+1}}$$

und folglich erhält man für das Potential einer mit magnetischer Masse von der Dichte 1 belegten Kreisscheibe, wenn der Anfangspunkt der Polarcoordinaten ($\varrho \vartheta \varphi$) mit dem Kreismittelpunkte zusammenfällt

$$\begin{aligned} \varrho < R \quad U &= 2\pi R \left\{ 1 - \frac{\varrho}{R} \sqrt{\cos^2 \vartheta} + \frac{1}{2} \left(\frac{\varrho}{R} \right)^2 P_2(\mu) \right. \\ (V) \quad &+ \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{1.3 \dots 2n-1}{(n+1)! 2^{n+1}} \left(\frac{\varrho}{R} \right)^{2n+2} P_{2n+2}(\mu) \Big\} \\ \varrho > R \quad U &= 2\pi R \left\{ \frac{1}{2} \frac{R}{\varrho} \right. \\ &+ \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{1.3 \dots 2n-1}{(n+1)! 2^{n+1}} \left(\frac{R}{\varrho} \right)^{2n+1} P_{2n}(\mu) \Big\} \end{aligned}$$

oder ¹⁾

$$(9) \quad \varrho < R \quad U = 2\pi R \left\{ 1 - \frac{\varrho}{R} \sqrt{\cos^2 \vartheta} + \frac{1}{2} P_2(\mu) \left(\frac{\varrho}{R} \right)^2 - \frac{1}{2! 2^2} P_4(\mu) \left(\frac{\varrho}{R} \right)^4 + \frac{1.3}{3! 2^3} P_6(\mu) \left(\frac{\varrho}{R} \right)^6 - \dots \right\},$$

$$(10) \quad \varrho > R \quad U = 2\pi R \left\{ \frac{1}{2} \frac{R}{\varrho} - \frac{1}{2! 2^2} P_2(\mu) \left(\frac{R}{\varrho} \right)^3 + \frac{1.3}{3! 2^3} P_4(\mu) \left(\frac{R}{\varrho} \right)^5 - \frac{1.3.5}{4! 2^4} P_6(\mu) \left(\frac{R}{\varrho} \right)^7 + \dots \right\}$$

Setzt man in (IV) $\vartheta = 90^\circ$, d. h. $\mu = 0$, so erhält man unter Berücksichtigung, dass

$$\begin{aligned} P_{2n+1}(0) &= 0, \quad P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{1.3 \dots 2n-1}{n! 2^n}, \\ \frac{1}{2} \frac{R^2}{\varrho} &= -\frac{1}{2} \frac{R^2 + \xi^2}{\varrho} \left(\frac{\xi^2}{R^2 + \xi^2} - 1 \right) \end{aligned}$$

¹⁾ Diese Formeln finden sich auf anderem Wege entwickelt in E. Mascart und J. Joubert, Lehrbuch der Elektrizität und des Magnetismus, deutsch von Levy, Bd. I, S. 332, nur mit dem Unterschied, dass das zweite Glied in der ersten Formel nicht wie oben $\sqrt{\cos^2 \vartheta}$, sondern einfach $\cos \vartheta$ zum Factor hat. Letzteres kann aber nicht der Fall sein, da die Werthe von U für ϑ und $180 - \vartheta$ identisch sein müssen.

ist, für das Potential einer mit magnetischer Masse von der Dichte 1 belegten Kreisfläche, wenn die Lage des Einheitspoles durch den Abscisse ξ und den senkrechten Abstand von der Kreisachse ϱ bestimmt wird

$$(VI) \quad \begin{aligned} \varrho < \sqrt{R^2 + \xi^2} \quad U &= 2\pi \sqrt{R^2 + \xi^2} \left\{ 1 - \frac{\sqrt{\xi^2}}{\sqrt{R^2 + \xi^2}} \right. \\ &\quad \left. - \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{1.3 \dots 2n-1}{n! 2^n} \left(\frac{\varrho}{\sqrt{R^2 + \xi^2}} \right)^{2n} \int_{m_0}^{m_2} P_{2n-1}(m) dm \right\}, \\ \varrho > \sqrt{R^2 + \xi^2} \quad U &= -2\pi \sqrt{R^2 + \xi^2} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\sqrt{R^2 + \xi^2}}{\varrho} \left[\frac{\xi^2}{R^2 + \xi^2} - 1 \right] \right. \\ &\quad \left. + \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{1.3 \dots 2n-1}{n! 2^n} \left(\frac{\sqrt{R^2 + \xi^2}}{\varrho} \right)^{2n+1} \int_{m_0}^{m_2} P_{2n+1}(m) dm \right\} \end{aligned}$$

oder ausgeführt, wenn zur Abkürzung $\sqrt{R^2 + \xi^2} = r$ gesetzt wird¹⁾

$$(11) \quad \begin{aligned} \varrho < r \quad U &= 2\pi r \left\{ 1 - \frac{\sqrt{\xi^2}}{r} + \frac{1}{2^2} \left(\frac{\varrho}{r} \right)^2 \left[\left(\frac{\xi}{r} \right)^2 - 1 \right] \right. \\ &\quad - \frac{1.3.5}{(2! 2^2)^2} \left(\frac{\varrho}{r} \right)^4 \left[\left(\frac{\xi}{r} \right)^4 - \frac{6}{5} \left(\frac{\xi}{r} \right)^2 + \frac{1}{5} \right] \\ &\quad + \frac{1.3.5.7.9}{(3! 2^3)^2} \left(\frac{\varrho}{r} \right)^6 \left[\left(\frac{\xi}{r} \right)^6 - \frac{5}{3} \left(\frac{\xi}{r} \right)^4 + \frac{5}{7} \left(\frac{\xi}{r} \right)^2 - \frac{1}{21} \right] \\ &\quad \left. - \dots \dots \dots \right\}, \end{aligned}$$

$$(12) \quad \begin{aligned} \varrho > r \quad U &= -2\pi r \left\{ \frac{1}{2} \frac{r}{\varrho} \left[\left(\frac{\xi}{r} \right)^2 - 1 \right] \right. \\ &\quad - \frac{1.3.5}{(2^2)^2} \frac{1}{3.4} \left(\frac{r}{\varrho} \right)^3 \left[\left(\frac{\xi}{r} \right)^4 - \frac{6}{5} \left(\frac{\xi}{r} \right)^2 + \frac{1}{5} \right] \\ &\quad + \frac{1.3.5.7.9}{(2! 2^2)^2} \frac{1}{5.6} \left(\frac{r}{\varrho} \right)^5 \left[\left(\frac{\xi}{r} \right)^6 - \frac{5}{3} \left(\frac{\xi}{r} \right)^4 + \frac{5}{7} \left(\frac{\xi}{r} \right)^2 - \frac{1}{21} \right] \\ &\quad \left. - \dots \dots \dots \right\}. \end{aligned}$$

¹⁾ Die erste der folgenden Formeln ist in E. Mascart und J. Joubert, Lehrbuch der Elektrizität und des Magnetismus, deutsch von Levy, Bd. I, S. 331, Gleich. 12, entwickelt. Es ist jedoch daselbst x durch $\sqrt{x^2}$ zu ersetzen, da U denselben Werth für positive und negative Werthe von x beibehalten muss.

Die gewonnenen Ausdrücke für das Potential U können dazu dienen, nach der Formel

$$V = i \frac{\partial U}{\partial n} = -i \frac{\partial U}{\partial \xi}$$

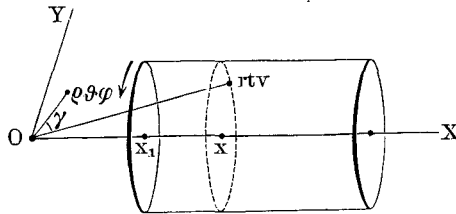
die entsprechenden Ausdrücke für das Potential V abzuleiten. In der That ergeben sich aus (IV) und (VI) die früher gefundenen Formeln (I) und (III).

Bestimmung des Potentials eines Kreisstromes mit einer Cylinderfläche als Stromfläche.

Unter Umständen ist es vorthailhaft, als Stromfläche die Cylinderfläche zu wählen, welche man erhält, wenn man durch die Peripheriepunkte des Kreises in der Richtung der positiven Normale Linien zieht und die so gewonnene Cylinderfläche in einem beliebigen Abstand von der Kreisebene durch eine der letzteren parallele Ebene begrenzt.

Es seien Fig. 5 R der Radius des Kreises, $(r \vartheta \varphi)$ und (rtv) die Polarcoordinaten des Einheitspoles und eines Flächenelementes $d\omega$ auf der Cylinderfläche, bezogen auf ein räumliches Polarcoordinatensystem mit dem Anfangspunkt O , dessen Achse OX mit der im Kreismittel-

Fig. 5.



punkt errichteten positiven Normale und dessen Fundamentelebene mit einer beliebig gewählten Ebene YOX zusammenfällt. Es seien ferner γ der Winkel, welchen die beiden Leitstrahlen φ und r mit einander einschliessen, e die Entfernung des Flächenelementes $d\omega$ vom Einheitspole und x_1 und x die Abstände der Kreisebene und der durch $d\omega$ senkrecht zur Cylinderachse gelegten Schnittfläche vom Anfangspunkt O .

Je nach der Grösse von φ sind hierbei verschiedene Fälle zu unterscheiden, welche sich in ähnlicher Weise wie oben behandeln lassen. Es soll jedoch hier nur der einfachste und

zugleich wichtigste Fall ins Auge gefasst werden, wo die Endfläche des Cylinders im Unendlichen liegt und $\varrho < R$ ist. Man kann alsdann die Endfläche gänzlich unberücksichtigt lassen, da ihr Antheil an dem Gesamtpotential in Folge ihrer unendlichen Entfernung gleich Null ist. Man erhält daher für das Potential den einfachen Ausdruck

$$V = i \int_0^{2\pi} \int_{x_1}^{\infty} R dv dx \frac{\partial \left(\frac{1}{e} \right)}{\partial R}.$$

Hierin ist

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r\varrho \cos \gamma + \varrho^2}} = \frac{1}{r} + \sum_1^{\infty} \frac{\varrho^n}{r^{n+1}} P_n(\cos \gamma)$$

zu setzen, wodurch man unter Berücksichtigung der Note (1), S. 98,

$$(1) \quad V = 2\pi i R \left[\int_{x_1}^{\infty} \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial R} dx + \sum_1^{\infty} \varrho^n P_n(\mu) \int_{x_1}^{\infty} \frac{\partial \left(\frac{P_n(m)}{r^{n+1}} \right)}{\partial R} dx \right]$$

erhält. Es ergibt sich nun leicht, wenn

$$\frac{x_1}{\sqrt{R^2 + x_1^2}} = m_1$$

gesetzt wird

$$R \int_{x_1}^{\infty} \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial R} dx = m_1 - 1,$$

ferner hat man

$$\frac{\partial \left(\frac{P_n(m)}{r^{n+1}} \right)}{\partial R} = \frac{1}{r^{n+1}} \frac{d P_n(m)}{d m} \frac{\partial m}{\partial R} - (n+1) \frac{P_n(m)}{r^{n+2}} \frac{\partial r}{\partial R}$$

oder weil

$$m = \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \quad r = \sqrt{R^2 + x^2}$$

$$\frac{\partial \left(\frac{P_n(m)}{r^{n+1}} \right)}{\partial R} = - \frac{R}{r^{n+3}} \left((n+1) P_n(m) + m \frac{d P_n(m)}{d m} \right).$$

Führt man diese Werthe in den Ausdruck (1) ein und nimmt m an Stelle von x zur Veränderlichen an, so ergibt sich mit Hülfe der Beziehungen

$$m = \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \quad x = \frac{mR}{\sqrt{1 - m^2}} \quad dx = \frac{R dm}{[1 - m^2]^{\frac{3}{2}}} \quad r = \frac{R}{\sqrt{1 - m^2}}$$

$$V = 2\pi i \left\{ -1 + m_1 - \sum_1^{\infty} \left(\frac{\varrho}{R} \right)^n P_n(\mu) \int_{m_1}^1 dm (1 - m^2)^{\frac{n}{2}} \right. \\ \left. \left[(n + 1) P_n(m) + m \frac{dP_n(m)}{dm} \right] \right\}.$$

Unter Berücksichtigung, dass

$$n \cdot n + 1 P_n(m) = - \frac{d}{dm} (1 - m^2) \frac{dP_n(m)}{dm}$$

ist

$$V = 2\pi i \left\{ -1 + m_1 + \sum_1^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\varrho}{R} \right)^n P_n(\mu) \right. \\ \left. \int_{m_1}^1 dm \frac{d}{dm} \left[(1 - m^2)^{\frac{n}{2}} (1 - m^2) \frac{dP_n(m_1)}{dm_1} \right] \right\}$$

und folglich, wenn

$$\frac{R}{\sqrt{1 - m_1^2}} = \sqrt{R^2 + x_1^2} = r_1$$

gesetzt wird

$$(2) \quad \varrho < R \quad V = 2\pi i \left\{ -1 + m_1 - (1 - m_1^2) \sum_1^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\varrho}{r_1} \right)^n P_n(\mu) \frac{dP_n(m_1)}{dm_1} \right\}.$$

Hierin haben r_1 und m_1 dieselbe Bedeutung wie r und m in der Formel I, S. 92. Lässt man, um die Uebereinstimmung noch vollständiger zu machen, den Anfangspunkt O des Polarcoordinatensystems auf die positive Seite der Kreisebene fallen und bezeichnet dann den Abstand des Kreismittelpunktes von O wie früher durch ξ , so hat man $\xi = -x_1$ und

$$m_1 = - \frac{\xi}{\sqrt{R^2 + \xi^2}}.$$

Die Formel (2) ergibt sich unmittelbar aus der ersten der Formeln I nach den S. 89 u. 90 angestellten Betrachtungen. Bezeichnet man jetzt mit V' das Potential des Kreisstromes mit der

Cylinderfläche als Stromfläche, mit V dasjenige mit der Kreisfläche als Stromfläche, so ist

$$V' = V - 4\pi i \text{ oder } V' = V,$$

je nachdem der Einheitspol auf der positiven oder negativen Seite der Kreisfläche gelegen ist. Im ersteren Falle ist

$$\xi + \varrho \cos \vartheta > 0 \quad \frac{\xi + \varrho \cos \vartheta}{\sqrt{(\xi + \varrho \cos \vartheta)^2}} = 1$$

im zweiten Falle ist

$$\xi + \varrho \cos \vartheta < 0 \quad \frac{\xi + \varrho \cos \vartheta}{\sqrt{(\xi + \varrho \cos \vartheta)^2}} = -1$$

womit die Uebereinstimmung nachgewiesen ist.

Drehungsmoment, welches ein Kreisstrom auf einen Magnet ausübt, dessen Mitte in die Kreisachse fällt.

Mit Hülfe der Gleichung (2), S. 111, lässt sich unmittelbar das Potential P eines Kreisstromes auf einen Magnet herstellen, dessen Mitte in der Kreisachse gelegen ist und dessen Polabstand kleiner ist als der Durchmesser des Kreises und zwar für jeden Winkel, den die magnetische Achse dabei mit der Kreisachse einschliesst. Denn bei Drehung des Magnets aus einer Anfangslage in eine beliebige Endlage ändert sich das Potential des Stromkreises in jedem der Pole immer stetig, sprunghaft Aenderungen sind ausgeschlossen.

Bezeichnet man mit V_1 und V_2 das Potential des Kreisstromes im Nord- und Südpol, in denen die magnetischen Mengen $+\mu'$ und $-\mu'$ concentrirt seien, so erhält man aus $P = \mu' (V_1 - V_2)$, wenn man beachtet, dass V_2 aus V_1 erhalten wird, wenn für ϑ und φ : $180 - \vartheta$ und $180 + \varphi$ gesetzt wird, und wenn man das magnetische Moment $2\mu\varrho$ mit M bezeichnet

$$P = -\frac{2\pi i M R^2}{r_1^3} \sum_0^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{\varrho}{r_1}\right)^{2n} P_{2n+1}(\mu) \frac{dP_{2n+1}(m_1)}{dm_1}.$$

Das Drehungsmoment, welches der Strom auf den Magnet in der Richtung der wachsenden ϑ ausübt, ist

$$-\frac{\partial P}{\partial \vartheta} = -\frac{\partial P}{\partial \mu} \frac{d\mu}{d\vartheta} = \sin \vartheta \frac{\partial P}{\partial \mu}.$$

Bezeichnet man das entgegengesetzt gerichtete Drehungsmoment durch D und führt man zugleich für ϑ sein Complement α

ein, welches dem Winkel zwischen der magnetischen Achse und der Stromebene gleich ist, so ergibt sich

$$(1) \quad D = \frac{2\pi i M R^2}{r_1^3} \cos \alpha \sum_0^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{\rho}{r_1}\right)^{2n} \frac{dP_{2n+1}(\mu)}{d\mu} \frac{dP_{2n+1}(m_1)}{dm_1}$$

oder ausgeführt,

$$\begin{aligned} D = & \frac{2\pi i M R^2}{r_1^3} \cos \alpha \sum_0^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \dots 4n+1}{(2n+1)!} \right)^2 (2n+1) \left(\frac{\rho}{r_1}\right)^{2n} \\ & \left[\left(\frac{\xi}{r_1}\right)^{2n} - \frac{2n \cdot 2n-1}{2 \cdot 4n+1} \left(\frac{\xi}{r_1}\right)^{2n-2} \right. \\ & + \frac{2n \cdot 2n-1 \cdot 2n-2 \cdot 2n-3}{2! 2^2 4n+1 \cdot 4n-1} \left(\frac{\xi}{r_1}\right)^{2n-4} - \dots \left. \right] \\ & \left[\sin^{2n} \alpha - \frac{2n \cdot 2n-1}{2 \cdot 4n+1} \sin^{2n-2} \alpha \right. \\ & + \frac{2n \cdot 2n-1 \cdot 2n-2 \cdot 2n-3}{2! 2^2 4n+1 \cdot 4n-1} \sin^{2n-4} \alpha - \dots \left. \right]. \end{aligned}$$

Ein Ausdruck, welcher in der Theorie der Tangentenbussole eine wichtige Rolle spielt.

Untersuchung der Gültigkeit des Ampère'schen Satzes über die Ersetzung eines Stromes durch eine magnetische Doppelfläche.

Um die Bedingungen festzustellen, unter denen ein galvanischer Strom durch eine magnetische Doppelfläche ersetzt werden kann, vergleichen wir das Potential des Stromes mit dem Potential der ihm entsprechenden Doppelfläche. Es soll dies hier nur für den speziellen Fall geschehen, wo die Stromcurve eine ebene Curve ist.

Um zunächst das Potential eines beliebigen, aber ebenen Stromes zu bestimmen, werde, Fig. 6, irgend ein Punkt O der umflossenen Stromfläche zum Anfangspunkt eines rechtwinkligen

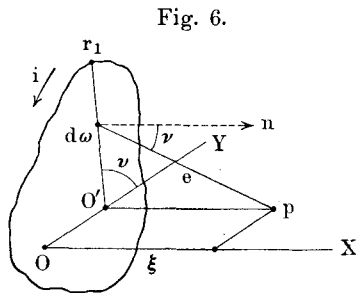


Fig. 6.

Coordinatensystems angenommen. Die X-Achse habe die Richtung der positiven Normale, die Y-Achse falle in die durch O und den Einheitspol p gelegten Ebene. Fällt man dann von p , dessen

Coordinaten ξ, η seien, ein Perpendikel pO' auf die Stromebene, so kann der Fusspunkt O' entweder innerhalb der umflossenen Fläche oder ausserhalb derselben zu liegen kommen oder endlich in die Stromcurve selbst fallen. Wir nehmen in allen drei Fällen O' zum Anfangspunkte eines Polarcoordinatensystems (r, v) , dessen Achse mit der Y -Achse zusammenfällt. Ist dann $d\omega$ irgend ein Element der Stromfläche mit den Polarcoordinaten (r, v) , ferner e die Entfernung zwischen $d\omega$ und p , und v der Winkel, welchen die auf $d\omega$ errichtete positive Normale n mit der Richtung $\vec{d\omega p}$ bildet, so ist das Potential des Stromes in p

$$V = i \int \frac{\cos v}{e^2} d\omega$$

oder da $d\omega = r dr dv$, $\cos v = \frac{\xi}{e}$

$$V = i \xi \iint \frac{r dr dv}{e^3} = i \xi \iint \frac{r dr dv}{[\xi^2 + r^2]^{3/2}}.$$

Bezeichnet im ersten Falle r_1 den Radiusvector des Curvenpunktes, in welchem der verlängerte Radiusvector von $d\omega$ die Curve schneidet, wo dann r_1 durch die Polargleichung der Stromcurve $r_1 = F(v)$ als Function von v gegeben ist, so erhält man

$$(1) \quad V = 2\pi i \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2}} - i \xi \int_0^{2\pi} \frac{dv}{\sqrt{\xi^2 + r_1^2}}.$$

Lässt man den Einheitspol durch die Stromfläche von der negativen zur positiven Seite wandern, so muss sich das Potential sprungweise um $4\pi i$ ändern.

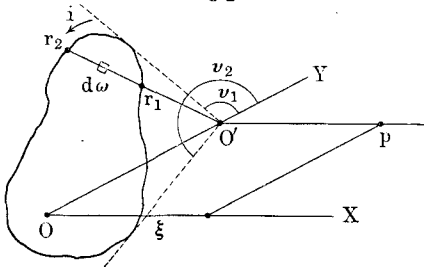
In der That ergibt sich aus obiger Formel

$$V_{+0} - V_{-0} = 4\pi i.$$

Liegt zweitens der Fusspunkt ausserhalb der Stromfläche und sind r_1 und r_2 die Leitstrahlen der Durchschnittpunkte des Radiusvectors von $d\omega$ mit der

Curve, welche als Functionen von v durch die Polargleichung $r = F(v)$ gegeben sind, bezeichnen ferner v_1 und v_2 die Winkel,

Fig. 7.



welche die beiden die Curve tangirenden Leitstrahlen mit der Y-Achse bilden, so hat man

$$(2) \quad V = i\xi \int_{v_1}^{v_2} dv \int_{r_1}^{r_2} \frac{r dr}{[\xi^2 + r^2]^{3/2}} = -i\xi \int_{v_1}^{v_2} dv \left[\frac{1}{\sqrt{\xi^2 + r_2^2}} - \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + r_1^2}} \right].$$

Um das Potential im dritten Falle herzuleiten, sei v_0 der Winkel, welchen die Tangente im Schnittpunkte von Curve und Y-Achse mit der letzteren bildet, dann findet sich

$$(3) \quad V = i\xi \int_{v_0}^{v_0 + \pi} dv \int_0^{r_1} \frac{r dr}{[\xi^2 + r^2]^{3/2}} = \pi i \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2}} - i\xi \int_{v_0}^{v_0 + \pi} \frac{dv}{\sqrt{\xi^2 + r_1^2}}.$$

Zu dem gleichen Resultate gelangt man, wenn man im ersten oder zweiten Falle den Fusspunkt O' in die Curve rücken lässt. Das Potential V ändert sich daher stetig, wenn der Fusspunkt durch die Curve schreitet, ausgenommen ist nur der Fall, wo der Einheitspol in der Stromebene selbst gelegen ist.

Auf ganz gleiche Weise ergibt sich in den drei betrachteten Fällen das Potential U , welches der Stromfläche zukommt, diese belegt gedacht mit magnetischer Masse von der Dichte 1. Es ist allgemein

$$U = \iint \frac{r dr dv}{\sqrt{\xi^2 + r^2}}.$$

Daraus folgt in den drei Fällen der Reihe nach

$$(4) \quad \begin{aligned} U &= -2\pi \sqrt{\xi^2} + \int_0^{2\pi} dv \sqrt{\xi^2 + r_1^2} \\ U &= \int_{v_1}^{v_2} dv [\sqrt{\xi^2 + r_2^2} - \sqrt{\xi^2 + r_1^2}], \\ U &= -\pi \sqrt{\xi^2} + \int_{v_0}^{v_0 + \pi} dv \sqrt{\xi^2 + r_1^2}. \end{aligned}$$

Versteht man unter Doppelfläche zwei der Stromfläche parallele und congruente Flächen, von denen jede den kleinen Abstand h von der Stromfläche besitzt und die auf der positiven Seite der Stromfläche liegende mit magnetischer Masse von der

Dichte $+\frac{i}{2h}$, die andere mit magnetischer Masse von der Dichte $-\frac{i}{2h}$ belegt ist, so ergibt sich aus (4) in den drei Fällen für das Potential der Doppelfläche, welches durch V' bezeichnet werden möge,

$$\begin{aligned} V' &= -\frac{2\pi i}{2h} (\sqrt{(\xi-h)^2} - \sqrt{(\xi+h)^2}) \\ &\quad + \frac{i}{2h} \int_0^{2\pi} dv (\sqrt{(\xi-h)^2 + r_1^2} - \sqrt{(\xi+h)^2 + r_1^2}), \\ V' &= \frac{i}{2h} \int_{v_1}^{v_2} dv (\sqrt{(\xi-h)^2 + r_2^2} - \sqrt{(\xi+h)^2 + r_2^2}) \\ (5) \quad &- \frac{i}{2h} \int_{v_1}^{v_2} dv (\sqrt{(\xi-h)^2 + r_1^2} - \sqrt{(\xi+h)^2 + r_1^2}), \\ V' &= -\frac{\pi i}{2h} (\sqrt{(\xi-h)^2} - \sqrt{(\xi+h)^2}) \\ &\quad + \frac{i}{2h} \int_{v_0}^{v_0+\pi} dv (\sqrt{(\xi-h)^2 + r_1^2} - \sqrt{(\xi+h)^2 + r_1^2}). \end{aligned}$$

Um die drei Fälle zusammenfassen zu können, sei r allgemein die Entfernung zwischen dem Fusspunkt des von dem Einheitspol auf die Stromebene gefällten Perpendikels und einem Punkte der Stromcurve, dann hat man

$$\begin{aligned} &\sqrt{(\xi-h)^2 + r^2} - \sqrt{(\xi+h)^2 + r^2} \\ &= \sqrt{(\xi^2 + r^2)} \left\{ \sqrt{1 - 2 \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + r^2}} \frac{h}{\sqrt{\xi^2 + r^2}} + \left(\frac{h}{\sqrt{\xi^2 + r^2}}\right)^2} \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{1 + 2 \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + r^2}} \frac{h}{\sqrt{\xi^2 + r^2}} + \left(\frac{h}{\sqrt{\xi^2 + r^2}}\right)^2} \right\} \end{aligned}$$

oder

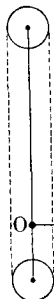
$$\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + r^2}} = \cos v \quad \frac{h}{\sqrt{\xi^2 + r^2}} = a$$

gesetzt

$$\begin{aligned} &\sqrt{(\xi-h)^2 + r^2} - \sqrt{(\xi+h)^2 + r^2} \\ &= \sqrt{\xi^2 + r^2} \{ \sqrt{1 - 2a \cos v + a^2} - \sqrt{1 + 2a \cos v + a^2} \}. \end{aligned}$$

zur Stromebene steht, und führt denselben mit seinem Mittelpunkt längs der Stromcurve entlang, während seine Ebene immer

Fig. 9.



zur Stromfläche senkrecht bleibt, so erhält man alsdann einen Ring. Für alle Punkte, welche ausserhalb des Ringes gelegen sind, ist die Bedingung

$$\frac{h}{\sqrt{\xi^2 + r^2}} < 1$$

erfüllt. Die Formeln (5) nehmen daher für alle im Aussenraum vom Ringe gelegenen Punkte die Gestalt an

$$V' = -\frac{2\pi i}{2h} [\sqrt{(\xi - h)^2} - \sqrt{(\xi + h)^2}] - i\xi \int_0^{2\pi} \frac{dv}{\sqrt{\xi^2 + r_1^2}} (1 + R_1),$$

$$(6) \quad V' = -i\xi \left[\int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{\sqrt{\xi^2 + r_2^2}} (1 + R_2) - \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{\sqrt{\xi^2 + r_1^2}} (1 + R_1) \right],$$

$$V' = -\frac{\pi i}{2h} [\sqrt{(\xi - h)^2} - \sqrt{(\xi + h)^2}] - i\xi \int_{v_0}^{v_0 + \pi} \frac{dv}{\sqrt{\xi^2 + r_1^2}} (1 + R_1),$$

wobei R_1 und R_2 die Werthe von R bedeuten, wenn für r : r_1 resp. r_2 gesetzt wird.

Im ersten Fall, wo der Fusspunkt des Perpendikels innerhalb der Stromfläche liegt, unterscheiden wir noch die beiden Unterfälle: α) Der Einheitspol liegt ausserhalb der Doppelfläche oder auf einer der beiden Grenzflächen, dann ist $-h \geq \xi \geq h$, β) der Einheitspol liegt im Inneren der Doppelfläche, dann ist $-h < \xi < h$.

Im Falle α) findet sich

$$\frac{1}{2h} [\sqrt{(\xi - h)^2} - \sqrt{(\xi + h)^2}] = \frac{\sqrt{\xi^2}}{2h} \left[\sqrt{\left(1 - \frac{h}{\xi}\right)^2} - \sqrt{\left(1 + \frac{h}{\xi}\right)^2} \right]$$

oder da $-h \geq \xi \geq h$ ist und in Folge davon $1 - \frac{h}{\xi}$ und $1 + \frac{h}{\xi}$ stets positive Grössen sind:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2h} [\sqrt{(\xi - h)^2} - \sqrt{(\xi + h)^2}] &= \frac{\sqrt{\xi^2}}{2h} \left[1 - \frac{h}{\xi} - \left(1 + \frac{h}{\xi} \right) \right] \\ &= - \frac{\sqrt{\xi^2}}{\xi} = - \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2}}. \end{aligned}$$

Im Falle β) dagegen hat man

$$\begin{aligned} \frac{1}{2h} [\sqrt{(\xi - h)^2} - \sqrt{(\xi + h)^2}] &= \frac{h}{2h} \left[\sqrt{\left(\frac{\xi}{h} - 1 \right)^2} - \sqrt{\left(\frac{\xi}{h} + 1 \right)^2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\sqrt{\left(1 - \frac{\xi}{h} \right)^2} - \sqrt{\left(1 + \frac{\xi}{h} \right)^2} \right] \end{aligned}$$

Nun ist $-h < \xi < h$, und folglich sind $1 - \frac{\xi}{h}$ und $1 + \frac{\xi}{h}$ stets positive Grössen, mithin folgt

$$\frac{1}{2h} [\sqrt{(\xi - h)^2} - \sqrt{(\xi + h)^2}] = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\xi}{h} - \left(1 + \frac{\xi}{h} \right) \right] = - \frac{\xi}{h}.$$

Fällt der Fusspunkt des Perpendikels in die Stromcurve, so folgt, weil wir voraussetzen, dass für alle Punkte der Stromcurve $\frac{h}{\sqrt{\xi^2 + r_1^2}} < 1$ ist, und in diesem Falle der kleinste Werth, den r_1 annehmen kann, null ist, dass

$$\sqrt{\xi^2} > h \text{ oder } -h > \xi > +h$$

sein muss. In der dritten Gleichung (6) ist demnach stets

$$\frac{1}{2h} [\sqrt{(\xi - h)^2} - \sqrt{(\xi + h)^2}] = - \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2}}$$

zu setzen.

Man erhält hiernach an Stelle der ersten Gleichung (6), indem man noch die Ausdrücke 1), 2), 3) für das Potential des Stromes in Rücksicht zieht

$$\begin{aligned} (7) \quad -h \geq \xi \geq h \quad V' &= 2\pi i \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2}} - i\xi \int_0^{2\pi} \frac{dv}{\sqrt{\xi^2 + r_1^2}} (1 + R_1) \\ &= V - i\xi \int_0^{2\pi} \frac{R_1 dv}{\sqrt{\xi^2 + r_1^2}}. \end{aligned}$$

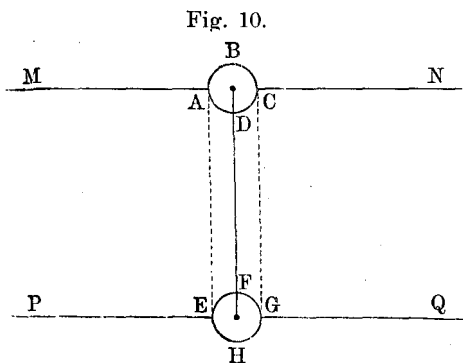
$$(8) \quad -h < \xi < h \quad V' = 2\pi i \frac{\xi}{h} - i\xi \int_0^{2\pi} \frac{dv}{\sqrt{\xi^2 + r_1^2}} (1 + R_1) \\ = V + 2\pi i \left(\frac{\xi}{h} - \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2}} \right) - i\xi \int_0^{2\pi} \frac{R_1 dv}{\sqrt{\xi^2 + r_1^2}}.$$

Ferner geben die beiden letzten Gleichungen (6)

$$(9) \quad V' = V - i\xi \left[\int_{v_1}^{v_2} \frac{R_2 dv}{\sqrt{\xi^2 + r_2^2}} - \int_{v_1}^{v_2} \frac{R_1 dv}{\sqrt{\xi^2 + r_1^2}} \right].$$

$$(10) \quad V' = V - i\xi \int_{v_3}^{v_0 + \pi} \frac{R_1 dv}{\sqrt{\xi^2 + r_1^2}}.$$

Um die Resultate dieser Betrachtungen übersichtlich aussprechen zu können, ziehen wir durch die einzelnen Punkte der Stromcurve Linien, welche zu der Stromfläche senkrecht stehen.



Dieselben bilden in ihrer Gesamtheit einen Cylinder $MNPQ$. In Fig. 10 wird die Doppelfläche durch AE und CG dargestellt. Die Kreisflächen $ABCD$ und $EFGH$ vom Durchmesser $2h$ sind Durchschnitte des Ringes, welcher die Stromcurve umgiebt.

Das Potential V des Stromes lässt sich dann durch das Potential V' der zugehörigen Doppelfläche auf folgende Weise ausdrücken.

1. Liegt der Einheitspol im Innenraume des Cylinders, $MNPQ$, aber im Aussenraume der Doppelfläche $AECG$, so ist

$$V = V' + i\xi \int_0^{2\pi} \frac{R_1 dv}{\sqrt{\xi^2 + r_1^2}}.$$

Dieselbe Formel gilt auch noch, wenn der Einheitspol in eine der Begrenzungsflächen AE oder CG selbst zu liegen kommt.

2. Liegt der Einheitspol im Innern der Doppelfläche, aber im Aussenraume des Ringes, so hat man

$$V = V' - 2\pi i \left(\frac{\xi}{h} - \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2}} \right) + i \xi \int_0^{2\pi} \frac{R_1 dv}{\sqrt{\xi_1^2 + r_1^2}}.$$

3. Liegt der Einheitspol im Aussenraume sowohl des Cylinders als auch des Ringes, so ist

$$V = V' + i \xi \left[\int_{v_1}^{v_2} \frac{R_2 dv}{\sqrt{\xi^2 + r_2^2}} - \int_{v_1}^{v_2} \frac{R_1 dv}{\sqrt{\xi^2 + r_1^2}} \right].$$

4. Liegt der Einheitspol in der Cylinderfläche, aber im Aussenraume des Ringes, so ist

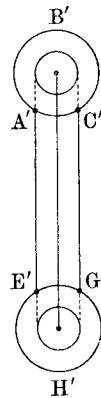
$$V = V' + i \xi \int_{v_0}^{v_0 + \pi} \frac{R_1 dv}{\sqrt{\xi^2 + r_1^2}}.$$

Von diesen strengen Formeln würde man Gebrauch zu machen haben, wenn es sich z. B. darum handelt, das Potential einer Spule mit gerader Achse zu bestimmen, deren Windungen einen merklichen Abstand von einander besitzen, oder bei welcher Drähte mit dicker Umspinnung verwandt wurden.

Ist $\frac{h}{\sqrt{\xi^2 + r^2}}$ für alle Punkte der Stromcurve so klein, dass das Quadrat gegen 1 verschwindet, oder, was dasselbe ist, lässt man den Einheitspol nur so nahe an die Stromcurve heranrücken, dass für seinen kürzesten Abstand von der Stromcurve $\left(\frac{h}{\sqrt{\xi^2 + r^2}} \right)^2$ gegen 1 verschwindet, so ist auch R verschwindend klein und sämtliche Zusatzglieder, welche R enthalten, fallen aus den obigen Formeln fort.

Construirt man, Fig. 11, zu dem Ringe mit dem kreisförmigen Querschnitt vom Radius h einen concentrischen Ring $A'B'C'$, $E'G'H'$ mit kreisförmigem Querschnitt von einem solchen Radius λ , dass $\left(\frac{h}{\lambda} \right)^2$ gegen 1 als verschwindend betrachtet werden darf, so gilt das Theorem: Für alle Punkte, welche im Aussenraum des Ringes mit dem Querschnitt

Fig. 11.



vom Radius λ und zugleich im Aussenraume der Doppelfläche, respective auf einer der Begrenzungsflächen derselben gelegen sind, ist das Potential des Stromes demjenigen der Doppelfläche gleich, also

$$(11) \quad V = V'.$$

Für alle Punkte dagegen, welche im Aussenraume des Ringes mit dem Querschnitt vom Radius λ und zugleich im Innenraume der Doppelfläche gelegen sind, ist

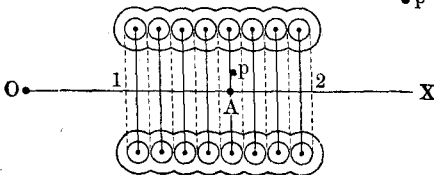
$$(12) \quad V = V' - 2\pi i \left(\frac{\xi}{h} - \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2}} \right).$$

Potential einer Spule mit geradliniger Achse.

Die obigen Formeln finden unmittelbare Anwendung, wenn es sich darum handelt, das Potential einer Spule mit geradliniger Achse auf einen ausserhalb oder innerhalb derselben gelegenen Einheitspol zu bestimmen.

Es sei, Fig. 12, OX die Achse einer Spule mit n -Umwindungen von der Steighöhe $2h$. Die Wirkung der Spule lässt sich ersetzen durch die Wirkung von n geschlossenen, ebenen Strömen, welche parallele und zur Spulenachse senkrechte Strom-

Fig. 12.



flächen vom Abstände $2h$ besitzen. Die Lage der Stromflächen werde durch ihren Abstand ξ von einem beliebigen, auf der Achse gelegenen Punkt O bestimmt, und ferner falle die Rich-

tung der Achse OX mit der Richtung der positiven Normale zusammen.

Wir construiren zu jeder Stromcurve die zugehörige Doppelfläche mit dem Flächenabstand $2h$ und bezeichnen die am negativen und positiven Ende der Spule gelegenen Flächen, welche mit magnetischer Masse von der Dichte $-\frac{i}{2h}$ und $+\frac{i}{2h}$ belegt sind, durch 1 und 2. Der Abstand der Flächen 1 und 2 werde die Länge der Spule genannt und mit l bezeichnet. Endlich umgeben wir jede Stromcurve mit einem Ringe von kreisförmigem

Querschnitt, so dass die Stromcurve die Mittelpunkte der Querschnitte enthält; dabei sei der Radius λ des Querschnittes so gewählt, dass $\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2$ gegen 1 verschwindet.

Es liege nun zunächst der Einheitspol im Aussenraume der Ringe und zugleich im Aussenraume der Spule oder auf einer der Grenzflächen 1 oder 2, dann darf jeder Strom durch seine Doppelfläche ersetzt werden. Man erhält dann, weil die zusammenfallenden Flächen sich in ihren Wirkungen aufheben, für das Potential Ω der Spule

$$(1) \quad \Omega = U_1 + U_2,$$

wo U_1 und U_2 die Potentiale der belegten Endflächen 1 und 2 auf den Einheitspol bedeuten.

Beachtet man, dass

$$l = 2h \cdot n, \text{ also } \frac{1}{2h} = \frac{n}{l} = \nu$$

ist, wenn ν die Anzahl Ströme bezeichnet, welche auf die Längeneinheit der Achse kommen, so hat man

$$U_1 = -i\nu \int \frac{d\omega}{e_1} \quad U_2 = +i\nu \int \frac{d\omega}{e_2}.$$

Darin sind e_1 und e_2 die Entfernungen eines Flächenelementes $d\omega$ der Fläche 1 respective 2 vom Einheitspol.

Liegt zweitens der Einheitspol im Aussenraume der Ringe, aber im Innenraume der Spule, so können wie vorher die einzelnen Ströme durch ihre Doppelflächen ersetzt werden, mit Ausnahme desjenigen Stromes, innerhalb dessen Doppelfläche der Einheitspol zu liegen kommt.

Ist, Fig. 12, $OA = a$ der Abstand dieses Stromes vom Anfangspunkte O , so ergibt sich sein Potential auf den Einheitspol nach (12) S. 122, indem daselbst für $\xi : \xi - a$ gesetzt wird:

$$V = V' - 2\pi i \left(\frac{\xi - a}{h} - \frac{\xi - a}{\sqrt{(\xi - a)^2}} \right).$$

Für die Summe der Potentiale aller Ströme, d. h. für das Potential der Spule findet sich jetzt

$$(2) \quad \Omega = U_1 + U_2 - 2\pi i \left(\frac{\xi - a}{h} - \frac{\xi - a}{\sqrt{(\xi - a)^2}} \right).$$

Es ist $\frac{\xi - a}{\sqrt{(\xi - a)^2}} = \pm 1$, je nachdem der Einheitspol auf der positiven oder negativen Seite der Stromfläche des Stromes a gelegen ist. Hiernach kann man auch schreiben

$$\Omega = U_1 + U_2 - 2\pi i \frac{\xi}{h} + 2\pi i \left(\pm 1 + \frac{a}{h} \right).$$

Das letzte Glied ist eine Constante. Führt man für $\frac{1}{h}$ seinen Werth 2ν ein, so ergibt sich schliesslich für einen Punkt im Innern der Spule

$$(3) \quad \Omega = U_1 + U_2 - 4\pi i \nu \xi + \text{Const.}$$

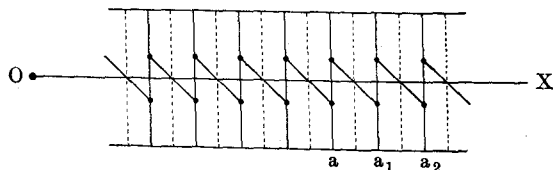
Setzt sich die Spule nach beiden Seiten in das Unendliche fort, so erhält man für das Potential Ω' in einem äusseren und inneren Punkt nach (13) und (14)

$$\Omega' = 0 \quad \text{und} \quad \Omega' = 2\pi i \left(\frac{\xi - a}{\sqrt{(\xi - a)^2}} - \frac{\xi - a}{h} \right).$$

Lässt man den Einheitspol innerhalb der Doppelfläche des Stromes a von der negativen zur positiven Grenzfläche wandern, so ist

$$\begin{aligned} \text{für } \xi = a - h & \quad \Omega' = 2\pi i (-1 + 1) = 0 \\ \xi = a_0 & \quad \Omega' = -2\pi i \\ \xi = a_+0 & \quad \Omega' = +2\pi i \\ \xi = a + h & \quad \Omega' = 2\pi i (+1 - 1) = 0. \end{aligned}$$

Fig. 13.



Trägt man Ω' als Ordinate zu den Abscissen ξ graphisch auf, Fig. 13, so sieht man, dass das Potential von $\xi = a - h$ bis

$\xi = a$ längs einer geraden Linie von 0 bis $-2\pi i$ abnimmt, an der Stelle $\xi = a$ eine sprungweise Aenderung von $-2\pi i$ zu $+2\pi i$ erleidet und sodann von $\xi = a$ bis $\xi = a + h$ längs einer der vorigen parallelen Linie wieder von $+2\pi i$ bis auf 0 abnimmt. Dasselbe wiederholt sich, wenn der Einheitspol in das Gebiet des Stromes $a_1, a_2 \dots$ eintritt. Lässt man daher den Einheitspol parallel zur Achse der Spule in der Richtung vom negativen zum positiven Ende fortwandern, so erleidet das Potential bei jedem Durchgange durch eine Stromfläche einen Sprung von $4\pi i$. Bei dem Durchgang durch die Begrenzungsflächen der einzelnen Doppelflächen nimmt dagegen das Potential den Werth null an. Die Tangente des Winkels, unter welchem die Linien, welche die Aenderungen des Potentials darstellen, die Achse schneiden, ist constant und gleich $-\frac{2\pi i}{h}$ und hierin liegt der Grund, dass die zur Achse OX parallel gerichtete Kraft

$$X = -\frac{\partial \Omega'}{\partial \xi} = 4\pi i v$$

für jede Abscisse ξ constant ist.

BEITRÄGE

ZUR

KENNTNISS DER RHODANESSIGSÄUREN

UND DER

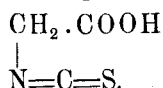
THIOOXYFETTSÄUREANILIDE.

VON

H. BECKURTS UND G. FRERICHs.

I.

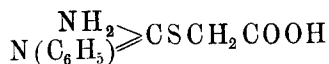
Wie wir durch frühere Untersuchungen nachgewiesen haben¹⁾, entsteht durch Einwirkung von Rhodankalium auf Chloressigsäure eine Isorhodanverbindung, die Isorhodanessigsäure:



Derivate der Isorhodanessigsäure erhält man leicht, indem man auf Verbindungen der Chloressigsäure Rhodankalium einwirken lässt. So entsteht aus Chloressigsäureäthylester der Isorhodanessigsäureäthylester, $\text{CH}_2(\text{NCS})\text{COOC}_2\text{H}_5$, aus Chloracetamid Isorhodanacetamid, $\text{CH}_2(\text{NCS})\text{CONH}_2$.

Ein eigenthümliches Verhalten zeigt die Isorhodanessigsäure gegen aromatische Aminbasen.

Um organische Salze der Isorhodanessigsäure darzustellen, liessen wir auf Anilinchlorhydrat isorhodanessigsäures Kalium einwirken und erhielten dadurch eine Verbindung, welche zwar genau die Zusammensetzung eines isorhodanessigsäuren Anilins besass, in seinem ganzen Verhalten aber durchaus keine Aehnlichkeit mit einem Salz des Anilins zeigte. Vor Allem gelang es nicht, aus dieser Verbindung durch Alkalien das Anilin oder durch Mineralsäuren die Isorhodanessigsäure wieder abzuscheiden. Wie sich bald herausstellte, war die erhaltene Verbindung identisch mit einem Körper, den Jäger²⁾ aus Anilin, Chloressigsäure und Rhodanammonium darstellte und als Phenylthiohydantoinsäure von der Formel:



bezeichnete. Derselbe Körper wurde später von Claësson³⁾

¹⁾ Arch. d. Pharm. 1900, 9. — ²⁾ Journ. f. pr. Chem. (2) 16, 17. — ³⁾ Berl. Ber. 14, 732.

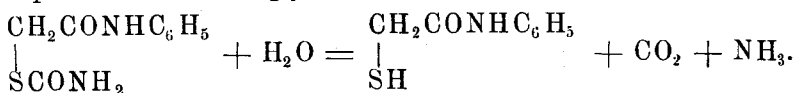
aus der freien Isorhodanessigsäure und Anilin in ätherischer Lösung dargestellt. Die von Jäger aufgestellte Formel wurde von Claesson als richtig angenommen. Vor kurzer Zeit hat aber Nikolo Rizzo¹⁾ erkannt, dass die vermeintliche Phenylthiohydantoinssäure nicht als solche, sondern als Carbamin-

thioglycolsäureanilid, $\begin{array}{c} \text{CH}_2\text{CONHC}_6\text{H}_5 \\ | \\ \text{S}\text{CONH}_2 \end{array}$, anzusehen ist.

Durch Kochen mit Wasser in einer Schwefelwasserstoffatmosphäre hat Rizzo aus dieser Verbindung Thioglycolsäureanilid $\text{CH}_2(\text{SH})\text{CONHC}_6\text{H}_5$ erhalten, durch Kochen an der Luft dagegen das Oxydationsproduct des Thioglycolsäureanilids, das

Dithioglycolsäureanilid: $\begin{array}{c} \text{SCH}_2\text{CONHC}_6\text{H}_5 \\ | \\ \text{SCH}_2\text{CONHC}_6\text{H}_5 \end{array}$.

Rizzo nimmt an, dass beim Kochen mit Wasser das Carbaminthioglycolsäureanilid Kohlensäureanhydrid und Ammoniak abspaltet und in Thioglycolsäureanilid übergeht:



Unsere Versuche haben nun aber gezeigt, dass die Umsetzung in anderer Weise erfolgt und zwar so, dass das Carbaminthioglycolsäureanilid glatt in Cyansäure (CONH) und Thioglycolsäureanilid zerfällt. Kohlensäure und Ammoniak entstehen dann erst durch secundäre Einwirkung des Wassers auf die Cyansäure: $\text{CONH} + \text{H}_2\text{O} = \text{CO}_2 + \text{NH}_3$.

Viel leichter als durch Kochen mit Wasser lässt sich die Abspaltung der Cyansäure durch Alkalien bewirken. Am besten eignet sich hierzu Ammoniak, weil Aetzkali und Aetznatron bei längerer Einwirkung leicht weitergehende Zersetzungen bewirken können. Die Spaltung des Carbaminthioglycolsäureanilids tritt schon bei gewöhnlicher Temperatur ein, wenn man eine alkoholische Lösung mit Ammoniak versetzt, man kann aber auch das Anilid mit Ammoniakflüssigkeit erwärmen, bis dasselbe fast völlig in Lösung gegangen ist. Beim Ansäuern der filtrirten Lösung mit Salzsäure fällt dann das Thioglycolsäureanilid

¹⁾ Gazz. chim. ital. 28, I, 356; Chem. Centralbl. 1898, I, 296.

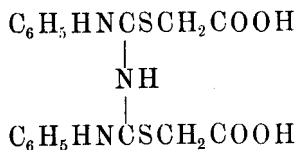
krystallinisch aus, während Cyansäure, die an dem stechenden Geruche leicht kenntlich ist, entweicht. Ein kleiner Theil des Thioglycolsäureanilids oxydirt sich schon während des Erhitzens mit Ammoniak zu dem unlöslichen Dithioglycolsäureanilid, welches durch Filtriren entfernt wird. Um eine weitere Oxydation des Filtrates zu verhindern, filtrirt man zweckmässig in ein hohes, mit dem Trichter abgeschlossenes Becherglas hinein, in welchem man vorher aus kohlensaurem Ammon und Salzsäure eine Kohlensäureatmosphäre erzeugt hat. Die Salzsäure fügt man alsdann nach Wegnahme des Filters durch den Trichter hinzu.

Das so dargestellte Thioglycolsäureanilid ist völlig rein und schmilzt bei 111 bis 112°. Der Schmelzpunkt wird auch durch Umkrystallisiren nicht verändert. Rizzo giebt für diese Verbindung als Schmelzpunkt 105 bis 107° an, es ist aber anzunehmen, dass man durch das Kochen mit Wasser ein weniger reines Product erhält als durch die Spaltung mit Ammoniak.

Die Analysen ergaben folgende Resultate:

- I. 0,1794 g Substanz gaben 0,3780 CO₂ = 0,1031 C = 57,47 Proc. C, und 0,0932 H₂O = 0,01035 H = 5,77 Proc. H.
- II. 0,2133 g Substanz gaben 0,2973 BaSO₄ = 0,04083 S = 19,14 Proc. S.
Berechnet für die Formel C₆H₅NSO:
C = 57,48 Proc. H = 5,39 Proc. S = 19,16 Proc.

Aus der vermeintlichen Phenylthiohydantoinssäure will C. Liebermann¹⁾ durch Zusammenreiben mit kalter Natronlauge unter Ammoniakentwicklung einen bei 112 bis 115° schmelzenden Körper erhalten haben, dem er folgende Formel beilegt:



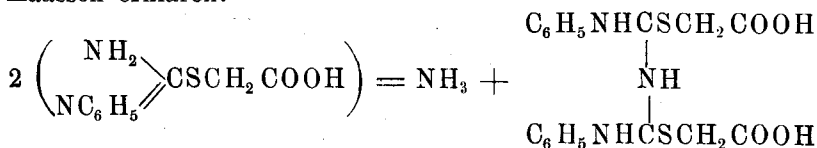
Die von Liebermann angeführten Analysen stimmen auch ganz gut auf diese Formel, es ist uns aber nicht gelungen, einen Körper von der von Liebermann angegebenen Zusammensetzung zu erhalten. Wir konnten auch das Auftreten von Ammoniak nicht constatiren, wohl aber trat beim Ansäuern deutlich der Geruch nach Cyansäure auf. Der beim Ansäuern krystallinisch

¹⁾ Annal. d. Chem. 207, 129.

ausfallende Körper erwies sich als völlig identisch mit dem Thioglycolsäureanilid, sowohl in der Zusammensetzung, im Schmelzpunkt und durch seine Löslichkeitsverhältnisse als auch dadurch, dass sämtliche Derivate des Thioglycolsäureanilids, welche weiter unten beschrieben werden sollen, völlig gleichmässig aus dem mit Ammoniak und dem nach Liebermann dargestellten Körper erhalten wurden. Die Analyse des mit Natronlauge erhaltenen Körpers ergab folgende Zahlen:

- I. 0,1881 Substanz gaben $0,3987 \text{ CO}_2 = 0,1087 \text{ C} = 57,78 \text{ Proc. C}$,
und $0,0937 \text{ H}_2\text{O} = 0,01041 \text{ H} = 5,53 \text{ Proc. H}$.
- II. 0,1785 Substanz gaben $0,2510 \text{ BaSO}_4 = 0,03447 \text{ S} = 19,31 \text{ Proc. S}$.
Die Formel $\text{CH}_2\text{SHCONHC}_6\text{H}_5$ verlangt:
 $\text{C} = 57,48 \text{ Proc. H} = 5,39 \text{ Proc. S} = 19,16 \text{ Proc.}$

Auf welche Weise sich die Differenz zwischen unserer Beobachtung und derjenigen Liebermann's erklärt, vermögen wir nicht anzugeben. Auffallend ist es, dass der von Liebermann angegebene Schmelzpunkt (112 bis 115°) so wenig von dem von uns für Thioglycolsäureanilid ermittelten (111 bis 112°) abweicht. Die von Liebermann angegebene Abspaltung von Ammoniak lässt sich nach der alten Formel der Thiohydantoinsäure einigermaassen erklären:



bei Annahme der richtigen Formel des Carbinthioglycolsäureanilids wäre aber nur eine Abspaltung von Ammoniak aus einem Molekül des ersteren unter Aufnahme von Wasser denkbar.

Den Beweis der Abspaltung von Cyansäure durch Einwirkung von Ammoniak konnten wir durch folgenden Versuch erbringen:

Etwa 25 g Carbinthioglycolsäureanilid wurden mit etwa 200 ccm 10 procentiger wässriger Ammoniakflüssigkeit im Kolben erhitzt, und die erhaltene Lösung zur Trockne verdampft. Der Rückstand wurde mit kaltem Wasser ausgezogen, und der filtrirte Auszug zur Trockne verdampft. Der so erhaltene Rückstand liess sich bereits durch seine Krystallform deutlich als Harnstoff erkennen. Zur völligen Reinigung wurde derselbe noch-

mals in wenig kaltem Wasser gelöst, filtrirt und eingedampft. Der jetzt fast reine Harnstoff wurde in Alkohol gelöst und durch Zusatz von Aether allmählich in krystallinischer Form ausgefällt. Der Schmelzpunkt stimmte mit demjenigen des Harnstoffs (130°) genau überein.

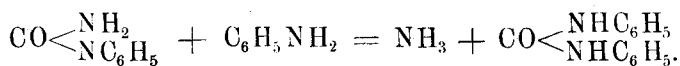
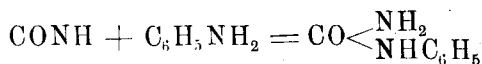
Die Analyse ergab folgende Zahlen:

- I. 0,4446 Substanz gaben 0,3350 CO₂ = 0,09136 C = 20,54 Proc. C, und 0,2568 H₂O = 0,02853 H = 6,41 Proc. H.
- II. 0,0912 Substanz gaben bei 17° und 785 mm Druck 87,5 cem feuchten N = 0,0433 N = 47,44 Proc. N.

Die Formel CH₄N₂O verlangt:

C = 20,00 Proc. H = 6,66 Proc. N = 46,66 Proc.

Die Abspaltung der Cyansäure kann ausser durch Alkalien auch durch organische Basen, Anilin und seine Homologen herbeigeführt werden. Hierdurch erklärt es sich auch, dass Rizzo aus dem Carbaminthioglycolsäureanilid durch Behandlung mit Anilin Diphenylharnstoff erhalten hat. Die abgespaltene Cyansäure verbindet sich mit Anilin zunächst zu Phenylharnstoff und dieser geht durch weitere Einwirkung von Anilin in Diphenylharnstoff über, unter Abspaltung von Ammoniak:

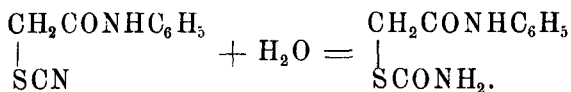


Auch durch Schmelzen des Carbaminthioglycolsäureanilids tritt die Abspaltung von Cyansäure ein. Letztere polymerisirt sich hierbei zum grössten Theil und liefert leicht zu isolirende, in Nadeln krystallisirte Cyanursäure. Diese Zersetzung bietet einen bequemen Weg zur Darstellung reiner wasserfreier Cyanursäure. Man hat nur nöthig, eine beliebige Menge des Carbaminthioglycolsäureanilids über seinen Schmelzpunkt zu erhitzen, wobei nach ganz kurzer Zeit die Schmelze sich in einen Krystallbrei verwandelt. Bei Behandlung derselben mit Alkohol bleibt dann reine Cyanursäure zurück. Die alkoholische Lösung enthält hauptsächlich Thioglycolsäureanilid, welches man mit Wasser ausfällen kann.

Die Abspaltung von Cyansäure durch Alkalien erklärt auch leicht die Thatsache, dass Rizzo sowohl aus dem Thioglycol-

säureanilid als auch aus dem Carbaminthioglycolsäureanilid durch Behandlung mit Jodmethyl und Natriummethylalkoholat Methylthioglycolsäureanilid erhielt. Das Natriummethylalkoholat wirkt hierbei ebenfalls als Alkali Cyansäure abspaltend, und dann wirkt das Jodmethyl auf das nun vorhandene Thioglycolsäureanilid ein.

Um für die Richtigkeit der von ihm aufgestellten Formel des Carbaminthioglycolsäureanilids weitere Beweise zu erbringen, versuchte Rizzo die Synthese dieser Verbindung auf anderem Wege und zwar beabsichtigte er, dieselbe aus Rhodanacetanilid darzustellen, welches er durch Einwirkung von Rhodankalium auf Chloracetanilid erhielt. Durch partielle Verseifung der Cyangruppe hätte diese Verbindung Carbaminthioglycolsäureanilid liefern müssen:



Rizzo schreibt nun, dass er aus Chloracetanilid und Rhodanbaryum oder -Ammonium das bekannte Rhodanacetanilid vom Schmelzpunkt 176° erhalten habe, dass es ihm aber nicht gelungen sei, dieses in Carbaminthioglycolsäureanilid überzuführen. In der uns zur Verfügung stehenden Litteratur haben wir das von Rizzo angeführte Rhodanacetanilid nicht auffinden können, dagegen hat vor Kurzem W. Grothe¹⁾ in hiesigem Laboratorium durch Einwirkung von Rhodankalium auf Chloracetanilid eine bei 86 bis 87° schmelzende Verbindung erhalten, deren Zusammensetzung der Formel eines Rhodanacetanilids entsprach. Ehe wir nun die Versuche Rizzo's zur Synthese des Carbaminthioglycolsäureanilids aus dem einen oder dem anderen Rhodanacetanilid wiederholten, haben wir zunächst versucht, den in den Schmelzpunktsangaben Rizzo's und Grothe's für Rhodanacetanilid bestehenden Widerspruch durch näheres Studium der Einwirkung von Rhodankalium auf Chloracetanilid aufzuklären. Wir erhitzen eine alkoholische Lösung von Chloracetanilid mit Rhodankalium einmal etwa 15 Minuten und einmal mehrere Stunden auf dem Wasserbade und erhielten im ersteren Falle die von Grothe dargestellte, bei 86 bis 87° schmelzende Verbindung, im zweiten

¹⁾ Archiv d. Pharm. 1900, 610.

Falle einen bei 178° (nicht, wie Rizzo angiebt, bei 176°) schmelzenden Körper.

Die Analyse beider Verbindungen ergab die der unitären Formel eines Rhodanacetanilids entsprechende Zusammensetzung.

Die nähere Untersuchung des bei 178° schmelzenden Körpers ergab, dass derselbe identisch war mit einer Verbindung, welche

als Phenylthiohydantoin, $\text{HNC} \begin{array}{l} \text{C}_6\text{H}_5 \\ \text{N}-\text{CO} \\ | \\ \text{S}-\text{CH}_2 \end{array}$, beschrieben ist und

zuerst von Paul J. Meyer¹⁾ aus Chloracetanilid und Thioharnstoff dargestellt wurde.

Die bei 86 bis 87° schmelzende Verbindung erwies sich dagegen als ein Derivat der normalen Rhodanessigsäure, nicht, wie wir erwartet hatten, der Isorhodanessigsäure. Wie wir bei unseren früheren Untersuchungen der Rhodanessigsäuren gefunden haben, liefern die Verbindungen der Isorhodanessigsäure durch Erhitzen mit Alkalien Cyanwasserstoff, welcher durch die Berlinerblaureaction leicht nachzuweisen ist. Verbindungen einer normalen Rhodanessigsäure hatten wir bislang nicht erhalten, wohl aber solche, die dem oben erwähnten Phenylthiohydantoin analog zusammengesetzt waren. So liefert das Isorhodanacetamid durch

Behandlung mit Ammoniak das Thiohydantoin, $\text{HNC} \begin{array}{l} \text{NH}-\text{CO} \\ | \\ \text{S}-\text{CH}_2 \end{array}$;

ferner erhielten wir aus Isorhodanacetylurethan durch längeres Erhitzen seiner Lösung einen Thiohydantoincarbonsäure-

ester, $\text{HNC} \begin{array}{l} \text{COOC}_2\text{H}_5 \\ \text{N}-\text{CO} \\ | \\ \text{S}-\text{CH}_2 \end{array}$, und auf analoge Weise noch einige

andere ähnliche Verbindungen.

Es sind nun drei isomere Verbindungen denkbar, welche durch Einwirkung von Rhodankalium auf Chloracetanilid entstehen

können. I. Isorhodanacetanilid, $\begin{array}{c} \text{CH}_2\text{CONHC}_6\text{H}_5 \\ | \\ \text{N}=\text{C}=\text{S} \end{array}$, II. nor-

¹⁾ Berl. Ber. 10, 1965.

males Rhodanacetanilid, $\begin{array}{c} \text{CH}_2\text{CONHC}_6\text{H}_5 \\ | \\ \text{S}-\text{C}\equiv\text{N} \end{array}$, und III. Phenyl-

thiohydantoin, $\text{HNC} \begin{array}{l} \text{C}_6\text{H}_5 \\ \swarrow \text{N}-\text{CO} \\ \searrow \text{S}-\text{CH}_2 \end{array}$. Da nun die von Grothe dar-

gestellte Verbindung beim Kochen mit Natronlauge keine Spur von Cyanwasserstoff lieferte, dieselbe sich aber andererseits als von dem Phenylthiohydantoin verschieden erwies und sich erst bei längerem Erhitzen ihrer Lösung in dieses verwandelte, so bleibt nur die Annahme eines normalen Rhodanacetanilids übrig.

Wir haben dann auch die übrigen, von Grothe beschriebenen Rhodanacetanilide von Neuem dargestellt und fanden, dass das o-Toluidid, p-Toluidid, p-Xylidid und p-Phenetidid, diejenigen also, welche sich von primären Aminen ableiten, Derivate der normalen Rhodanessigsäure sind, während die aus dem secundären Methylanilin erhaltene Verbindung sich als Isorhodan-

acetmethylanilid $\begin{array}{c} \text{CH}_2\text{CON} \begin{array}{l} \text{CH}_3 \\ \swarrow \\ \text{C}_6\text{H}_5 \end{array} \\ | \\ \text{N}=\text{C}=\text{S} \end{array}$, erwies, da dasselbe im

Gegensatz zu den übrigen Verbindungen deutliche Blausäure-reaction gab. Versuche, auch die primären Anilide der Isorhodanessigsäure darzustellen, führten zu keinem Resultate. Nur einmal erhielten wir durch nur etwa zwei Minuten dauerndes Erhitzen von Chloracet-p-toluidid mit Rhodankalium in alkoholischer Lösung einen Körper, welcher die Blausäurereaction lieferte und bei 114° schmolz, während das normale Rhodanacet-p-toluidid bei 125 bis 126° schmilzt. Die Krystallform beider Körper war dieselbe, und nach längerem Liegen gab der erstere die Blausäurereaction ebenso wenig mehr wie der letztere. Da uns die Darstellung eines die Blausäurereaction liefernden p-Toluidids nicht wieder gelungen ist, so vermögen wir nicht mit Sicherheit anzugeben, ob in dem bei 114° schmelzenden Körper Isorhodanacet-p-toluidid vorgelegen hat oder etwa eine Mischung desselben mit der normalen Verbindung.

Durch längeres Erhitzen der alkoholischen Lösung des p- und o-Toluidids konnten wir aus beiden die bereits bekannten

Tolylthiohydantoine erhalten, welche durch den Schmelzpunkt identificirt wurden.

Versuche, das Isorhodanacetmethylanilid durch Erhitzen seiner Lösung in die normale Verbindung oder in das entsprechende Thiohydantoin überzuführen, führten zu einem negativen Ergebniss. Selbst durch tagelanges Erhitzen der Lösung am Rückflusskühler sowohl wie im geschlossenen Rohr wurde das Isorhodanacetmethylanilid nicht verändert, es gab nach wie vor die Blausäurereaction und zeigte den unveränderten Schmelzpunkt von 79° ¹⁾.

Nachdem durch diese Versuche die Constitution der Rhodanacetanilide aufgeklärt war, versuchten wir, dieselben in die entsprechenden Carbaminthioglykolsäureanilide überzuführen, und zwar gelang uns dieses mit Leichtigkeit mittelst rauchender Salzsäure.

Rhodanacetanilid vom Schmelzpunkt 86 bis 87° wurde durch gelindes Erwärmen in rauchender Salzsäure gelöst, und die Lösung mit Wasser versetzt. Es schied sich eine krystallinische Verbindung aus, welche völlig reines Carbaminthioglykolsäureanilid darstellte und dieselben Eigenschaften zeigte, wie die aus Chloressigsäure, Anilin und Rhodankalium dargestellte Verbindung.

Ebenso lieferten auch das o- und p-Toluidid durch Behandlung mit rauchender Salzsäure Verbindungen, welche mit den aus Chloressigsäure, o- und p-Toluidin und Rhodanammonium dargestellten und in der Literatur unter der falschen Bezeichnung Tolylthiohydantoinensäuren beschriebenen Körpern identisch waren und als Carbaminthioglykolsäuretoluidide anzusehen sind.

Auch das Isorhodanacetmethylanilid liess sich durch rauchende Salzsäure glatt in eine Verbindung überführen, welche alle Eigenschaften einer Carbaminthioglykolsäureverbindung zeigte und keine Blausäurereaction mehr lieferte. In diesem Falle muss der partiellen Verseifung der CN-Gruppe zunächst die Umwandlung der Isorhodangruppe $—N=C=S$ in die normale Gruppe $—S—C\equiv N$ vorhergehen, welche, wie oben näher ausgeführt, beim Erhitzen der Lösung des Isorhodanacetanilids nicht eintritt. Das Carbaminthioglykolsäuremethylanilid lässt sich in analoger Weise wie das Anilid auch aus Chloressigsäure, Methyl-

¹⁾ In der Abhandlung von Grothe ist der Schmelzpunkt in Folge eines Druckfehlers zu 69° angegeben.

Isorhodanessig- säure	Normale Rhodan- essigsäure	Ringförmige Verbindung
$\text{CH}_2(\text{NCS})\text{COOH}$ Freie Isorhodanessigsäure	—	$\begin{array}{c} \text{NH-CO} \\ \diagup \quad \\ \text{CO} \quad \text{S-CH}_2 \\ \diagdown \end{array}$ Senfölessigsäure
$\text{CH}_2(\text{NCS})\text{COOC}_2\text{H}_5$ Isorhodanessigsäure- äthylester	—	—
$\text{CH}_2(\text{NCS})\text{CONH}_2$ Isorhodanacetamid	—	$\begin{array}{c} \text{NH-CO} \\ \diagup \quad \\ \text{HNC} \quad \text{S-CH}_2 \\ \diagdown \end{array}$ Thiohydantoin
$\text{CH}_2(\text{NCS})\text{CONHCOOC}_2\text{H}_5$ Isorhodanacetylurethan	—	$\begin{array}{c} \text{COOC}_2\text{H}_5 \\ \\ \text{N-CO} \\ \diagup \quad \\ \text{HNC} \quad \text{S-CH}_2 \\ \diagdown \end{array}$ Thiohydantoincarbon- säureäthylester
—	—	$\begin{array}{c} \text{CONH}_2 \\ \\ \text{N-CO} \\ \diagup \quad \\ \text{HNC} \quad \text{S-CH}_2 \\ \diagdown \end{array}$ Thiohydantoincarbamid
—	—	$\begin{array}{c} \text{CONHC}_6\text{H}_5 \\ \\ \text{N-CO} \\ \diagup \quad \\ \text{HNC} \quad \text{S-CH}_2 \\ \diagdown \end{array}$ Thiohydantoincarbanilid
—	$\text{CH}_2(\text{SCN})\text{CONHC}_6\text{H}_5$ Rhodanacetanilid	$\begin{array}{c} \text{C}_6\text{H}_5 \\ \\ \text{N-CO} \\ \diagup \quad \\ \text{HNC} \quad \text{S-CH}_2 \\ \diagdown \end{array}$ Phenylthiohydantoin
$\text{CH}_2(\text{NCS})\text{CONHC}_7\text{H}_7$ Isorhodanacet-p-toluidid ?	$\text{CH}_2(\text{SCN})\text{CONHC}_7\text{H}_7$ Rhodanacet p-toluidid	$\begin{array}{c} \text{C}_7\text{H}_7 \\ \\ \text{N-CO} \\ \diagup \quad \\ \text{HNC} \quad \text{S-CH}_2 \\ \diagdown \end{array}$ p-Tolylthiohydantoin
$\text{CH}_2(\text{NCS})\text{CON} < \begin{array}{l} \text{CH}_3 \\ \text{C}_6\text{H}_5 \end{array}$ Isorhodanacetmethyl- anilid	—	—

anilin und Rhodankalium darstellen, aber nur in alkoholischer Lösung, nicht wie das Anilid auch in wässriger Lösung. Es bildet glänzende Blättchen, welche in Alkohol löslich, in Wasser unlöslich sind und bei 147° schmelzen. Durch Alkalien spaltet es ebenfalls Cyansäure ab.

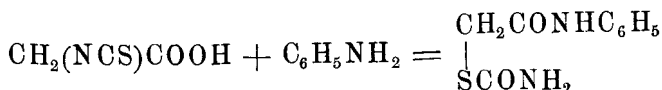
Die Ergebnisse unserer bisherigen Untersuchungen über die Rhodanessigsäuren lassen sich kurz wie folgt zusammenstellen.

Es giebt drei Reihen von isomeren Verbindungen, welche durch Einwirkung von Rhodankalium auf Chloressigsäure und deren Derivate erhalten werden können: Verbindungen der Isorhodansäure, der normalen Rhodanessigsäure und ringförmige Verbindungen. In der vorstehenden Tabelle sind die Hauptvertreter derjenigen Verbindungen zusammengestellt, welche wir bis jetzt dargestellt haben, oder welche bereits bekannt waren.

Wie aus dieser Tabelle ersichtlich ist, existiren die Verbindungen der Rhodanessigsäure in der Regel nur in einer oder in zweien der drei Reihen. Ob das p-Toluidid auch in der ersten Reihe in reinem Zustande darstellbar ist, müssen wir als fraglich bezeichnen. Verbindungen, welche der normalen Reihe angehören, liefern nur die aromatischen primären Amine. Alle Ester, auch aromatische Ester, existiren nur in der ersten Reihe, ebenso auch die Verbindungen der aromatisch-secundären Amine. Alle übrigen Verbindungen liefern auch Vertreter der dritten Reihe, welche als beständigste Form der Rhodanessigsäure-derivate anzusehen sind. Sowohl die Verbindungen der ersten als die der zweiten Reihe lassen sich durch Behandlung mit rauchender Salzsäure in Verbindungen der Carbaminthioglycolsäure

$\text{CH}_2\text{—COOH}$
 $\quad \quad \quad |$
 $\quad \quad \quad \text{SCONH}_2$, überführen. Die freie Isorhodanessigsäure liefert

mit organischen Basen keine Salze, sondern durch molekulare Umlagerungen ebenfalls Verbindungen der Carbaminthioglycolsäure:

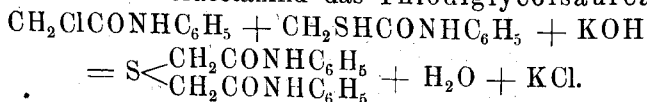


Dieselbe molekulare Umlagerung tritt nicht nur ein, wenn man die freie Isorhodanessigsäure auf Anilin und dessen Homologen

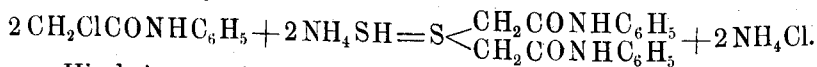
einwirken lässt, sondern auch bei der Einwirkung von Rhodansalzen auf chloressigsäure Amine. Da diese Reaction, wie wir durch weitere Untersuchungen feststellten, ganz allgemein auch auf andere Halogenfettsäureamide anwendbar ist, und die aus den entstandenen Carbaminverbindungen leicht zu erhaltenden Thiooxyfettsäureanilide in Folge der SH-Gruppe sehr reactionsfähige Körper darstellen, haben wir unsere Versuche in dieser Richtung noch weiter ausgedehnt, und es sollen einige derselben in dem Folgenden näher beschrieben werden.

II.

Die Thiooxyfettsäureanilide sind vermöge der SH-Gruppe gerade wie die Mercaptane im Stande, eine ausserordentlich grosse Anzahl von Derivaten zu bilden. So entstehen z. B. durch gelinde Oxydation die entsprechenden Dithioverbindungen, mit Halogenalkylen die Derivate einer grossen Anzahl von alkylthiooxyfettsäuren, mit Aldehyden und Ketonen analoge Verbindungen, wie sie von der freien Thioglycolsäure bereits bekannt sind. Weitere Derivate erhält man mit Halogenfettsäuren und deren Estern, Amiden, Aniliden etc., so entsteht z. B. aus Thioglycolsäureanilid mit Chloracetanilid das Thiodiglycolsäureanilid:



Dieselbe Verbindung hat Rizzo aus Chloracetanilid und Ammoniumsulfhydrat erhalten:



Hierbei entsteht zunächst ebenfalls Thioglycolsäureanilid, welches aber sofort auf das noch vorhandene Chloracetanilid weiter einwirkt. Lässt man das Thioglycolsäureanilid auf Chloracettoluide einwirken, so erhält man gemischte Anilide der Thiodiglycolsäure. Die Zahl der hier möglichen Verbindungen ist ausserordentlich gross, da man ja alle möglichen Chloracetanilide anwenden kann und ebenso sowohl Thioglycolsäureanilide wie die Anilide der Thiomilchsäure und der Thiooxybuttersäure.

Auch mit Chlorkohlensäureestern liefern die Anilide der Thiooxyfettsäuren sehr leicht Derivate, so erhält man z. B. aus

Thioglycolsäureanilid und Chlorkohlensäureäthylester eine Verbindung von der Formel $\text{CO} < \begin{smallmatrix} \text{SCH}_2\text{CONHC}_6\text{H}_5 \\ \text{OC}_2\text{H}_5 \end{smallmatrix}$, das Carbox-äthylthioglycolsäureanilid.

Denkt man sich in dieser Verbindung die Gruppe OC_2H_5 durch die Amidogruppe NH_2 ersetzt, so hat man wieder das Ausgangsproduct, das Carbaminthioglycolsäureanilid. Praktisch ist diese Reaction aber nicht ausführbar, da bei der Behandlung des Esters mit Ammoniak aus dem zunächst entstehenden Carbaminthioglycolsäureanilid durch das im Ueberschuss vorhandene Ammoniak sofort wieder Cyansäure abgespalten wird und wieder Thioglycolsäureanilid entsteht.

Das Wasserstoffatom der SH-Gruppe ist ferner durch Metalle ersetzbar, z. B. durch Kupfer, welches hier in der Oxydulform auftritt. Versetzt man eine ammoniakalische Lösung des Thioglycolsäureanilids mit Kupfersulfatlösung, so entsteht ein flockiger, gelbgrau gefärbter Niederschlag, welcher aus Cuprothioglycol-

säureanilid, $\begin{smallmatrix} \text{Cu-SCH}_2\text{CONHC}_6\text{H}_5 \\ | \\ \text{Cu-SCH}_2\text{CONHC}_6\text{H}_5 \\ | \\ \text{S-CH}_2\text{CONHC}_6\text{H}_5 \\ | \\ \text{S-CH}_2\text{CONHC}_6\text{H}_5 \end{smallmatrix}$, und aus Dithioglycol-säureanilid, $\begin{smallmatrix} | \\ \text{S-CH}_2\text{CONHC}_6\text{H}_5 \\ | \\ \text{S-CH}_2\text{CONHC}_6\text{H}_5 \end{smallmatrix}$, besteht. Letzteres entsteht

durch Oxydation eines Theiles des Thioglycolsäureanilids, welche durch das Kupfersulfat bewirkt wird.

Wir haben von der ausserordentlich grossen Zahl der Derivate der Thiooxyfettsäureanilide seither nur einige dargestellt. Die Darstellung derselben und ihre Eigenschaften sollen im Folgenden beschrieben werden.

Dithioglycolsäureanilid.

Das einfachste Derivat des Thioglycolsäureanilids ist das erste Oxydationsproduct desselben, das Dithioglycolsäure-

anilid, $\begin{smallmatrix} \text{SCH}_2\text{CONHC}_6\text{H}_5 \\ | \\ \text{SCH}_2\text{CONHC}_6\text{H}_5 \end{smallmatrix}$, welches bereits von Rizzo erhalten

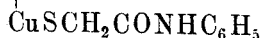
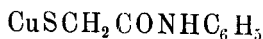
wurde. Die Oxydation des Thioglycolsäureanilids erfolgt in alkalischer Lösung schon durch den Sauerstoff der Luft. Am einfachsten erhält man die Verbindung, wenn man eine alko-

holische Lösung von Thioglycolsäureanilid mit Eisenchloridlösung versetzt. Das Eisenchlorid wird hierbei zu Eisenchlorür reducirt. Es tritt aber nicht, wie beim Kupfer, Eisen an Stelle des Wasserstoffatoms der SH-Gruppe. Auch aus dem in ammoniakalischer Lösung mit Kupfersulfat erhaltenen Niederschlag erhält man leicht das Dithioglycolsäureanilid durch Ausziehen mit heissem Alkohol. Die auf diese Weise dargestellte Verbindung besitzt die von Rizzo bereits angegebenen Eigenschaften und schmilzt bei 160 bis 161°.

Analysen:

- I. 0,1915 Substanz gaben $0,4056 \text{ CO}_2 = 0,1106 \text{ C} = 57,75 \text{ Proc. C}$, und $0,0811 \text{ H}_2\text{O} = 0,090 \text{ H} = 4,70 \text{ Proc. H}$.
- II. 0,3455 Substanz gaben bei 14° und 749 mm Druck 25,2 ccm feuchten N = 0,02923 N = 8,46 Proc. N.
Berechnet für die Formel $\text{C}_{16}\text{H}_{16}\text{N}_2\text{S}_2\text{O}_2$:
C = 57,83 Proc., H = 4,82 Proc., N = 8,43 Proc.

Das bei der Oxydation mit Kupfersulfat entstehende Cuprothioglycolsäureanilid

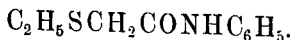


bleibt beim Ausziehen des Niederschlages mit Alkohol als ein amorphes, gelbes, nach dem Trocknen braunes Pulver zurück, welches in allen indifferenten Lösungsmitteln unlöslich ist.

Analysen:

- I. 0,2688 Substanz gaben $0,4100 \text{ CO}_2 = 0,1118 \text{ C} = 41,59 \text{ Proc. C}$, und $0,0357 \text{ H}_2\text{O} = 0,00952 \text{ H} = 3,54 \text{ Proc. H}$.
- II. 0,3524 Substanz gaben bei 14° und 739 mm Druck 19,1 ccm feuchten N = 0,0218 N = 6,18 Proc. N.
- III. 0,3891 Substanz gaben $0,1333 \text{ Cu}_2\text{S} = 27,32 \text{ Proc. Cu}$.
Die Formel $\text{Cu}_2\text{C}_{16}\text{H}_{16}\text{N}_2\text{S}_2\text{O}_2$ verlangt:
C = 41,92 Proc., H = 3,49 Proc., N = 6,11 Proc., Cu = 27,51 Proc.

Aethylthioglycolsäureanilid



Thioglycolsäureanilid (1 Mol.) wurde in alkoholischer Lösung mit Jodäthyl (etwas mehr als 1 Mol.) und alkoholischer Kalilauge (1 Mol. KOH entsprechend) auf dem Wasserbade am Rückfluss-

kühler so lange erhitzt, bis die alkalische Reaction der Flüssigkeit verschwunden war, was in ganz kurzer Zeit erfolgte. Gleichzeitig zeigte eine Probe der Flüssigkeit nach Zusatz von Ammoniak keine reducirende Einwirkung auf Kupfersulfat mehr, sondern wurde durch eine sehr geringe Menge desselben sofort rein blau gefärbt, während bei Gegenwart von Thioglycolsäureanilid ein gelbgrauer Niederschlag entsteht. Die alkoholische Flüssigkeit wurde nach dem Erkalten mit Wasser versetzt, wodurch eine milchige Trübung entstand und sich Oeltropfen abschieden. Durch Reiben einer kleinen Menge der Emulsion mit einem Glasstabe auf dem Uhrglase wurden bald Krystalle erhalten, welche, der übrigen Menge der Flüssigkeit zugefügt, bald krystallinische Abscheidung des Körpers veranlassten. Die erhaltene Verbindung wurde in der Weise umkrystallisirt, dass dieselbe in kaltem Alkohol gelöst, und die Lösung vorsichtig mit Wasser versetzt wurde, bis eben eine milchige Trübung, aber noch keine Abscheidung von Oeltropfen entstand. Dann wurden einige zurückbehaltene Krystalle eingimpft und die Lösung einige Zeit der Ruhe überlassen. Es hatten sich nun reichliche Mengen farbloser blättchenförmiger Krystalle gebildet und ein weiterer vorsichtiger Zusatz von Wasser vermehrte diese Abscheidung nach einiger Zeit noch beträchtlich. Mit dem Hinzufügen von Wasser wurde so lange fortgefahren, bis ein weiterer Zusatz keine Trübung der Mutterlauge hervorrief. Das Aethylthioglycolsäureanilid schmilzt bei 61°, es löst sich sehr leicht in kaltem Alkohol, in Wasser ist es so gut wie unlöslich.

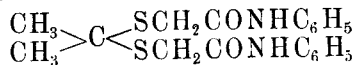
Analysen:

- I. 0,2542 Substanz gaben $0,3052 \text{ BaSO}_4 = 0,0415 \text{ S} = 16,48 \text{ Proc. S.}$
 II. 0,1854 Substanz gaben $0,4170 \text{ CO}_2 = 0,1137 \text{ C} = 61,32 \text{ Proc. C.},$
 und $0,1078 \text{ H}_2\text{O} = 0,01198 \text{ H} = 6,46 \text{ Proc. H.}$

Die Formel $\text{C}_{10}\text{H}_{13}\text{NSO}$ verlangt:

61,53 Proc. C, 6,66 Proc. H, 16,41 Proc. S.

Dimethylmethylen-thioglycolsäureanilid



Thioglycolsäureanilid wurde in überschüssigem Aceton gelöst, was bereits leicht in der Kälte erfolgte, und in die Lösung

etwa 10 Minuten lang Salzsäuregas eingeleitet. Die hierdurch stark erwärmte Flüssigkeit wurde nach dem Abkühlen in kaltes Wasser gegossen und die erhaltene krystallinische Abscheidung aus reinem Alkohol umkrystallisirt. Die Verbindung bildet farblose Nadeln, welche schwer löslich in kaltem Alkohol, leichter in heissem, unlöslich in Wasser sind und bei 174° schmelzen.

Analysen:

- I. 0,2528 Substanz gaben 0,5614 CO₂ = 0,1531 C = 60,56 Proc. C, und 0,1342 H₂O = 0,0149 H = 5,89 Proc. H.
 - II. 0,3936 Substanz gaben bei 20° und 751 mm Druck 26,5 ccm feuchten N = 0,02994 N = 7,51 Proc. N.
- Die Formel C₁₉H₂₂N₂S₂O₂ verlangt:
C = 60,96 Proc., H = 5,88 Proc., N = 7,48 Proc.

Thiodiglycolsäureanilid



Gleiche Moleküle Thioglycolsäureanilid und Chloracetanilid wurden in heissem Alkohol gelöst und die berechnete Menge alkoholischer 1/2 norm. Kalilauge hinzugefügt. Es trat sofort Ausscheidung von Chlorkalium auf. Die Mischung wurde noch einige Zeit erhitzt, dann das Chlorkalium abfiltrirt und das Filtrat mit Wasser versetzt. Der ausgeschiedene Körper wurde aus Alkohol umkrystallisirt und stellte so feine Nadeln dar, welche bei 166 bis 167° schmolzen.

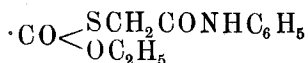
Analyse:

- 0,1998 Substanz gaben 0,4716 CO₂ = 0,1286 C = 64,36 Proc. C, und 0,0974 H₂O = 0,0103 H = 5,41 Proc. H.
- Die Formel C₁₆H₁₆N₂O₂S verlangt:
C = 64,00 Proc., H = 5,33 Proc.

Rizzo führt für das Thiodiglycolsäureanilid, welches er aus Chloracetanilid und Ammoniumsulfhydrat darstellte, 165° als Schmelzpunkt an, während R. Anschütz und F. Biernaux¹⁾ für dieselbe auf anderem Wege (aus Thiodiglycolsäuredichlorid und Anilin) dargestellte Verbindung 168° angeben.

¹⁾ Liebig's Annal. 273, 64—73.

Carboxäthylthioglycolsäureanilid



Thioglycolsäureanilid wurde in der berechneten Menge alkoholischer $\frac{1}{2}$ norm. Kalilauge gelöst und die Lösung mit Chlorkohlensäureäthylester (gleiche Molecüle) versetzt. Es trat schon in der Kälte sofort Ausscheidung von Chlorkalium ein, so dass Erwärmen nicht nöthig war. Durch Zusatz von Wasser wurde der Körper abgeschieden und aus verdünntem Alkohol umkrystallisirt. Er stellt farblose flache Nadeln dar, welche bei 99° schmelzen.

Analysen:

- I. 0,2563 Substanz gaben $0,5214 \text{ CO}_2 = 0,1422 \text{ C} = 55,48 \text{ Proc. C}$, und $0,1272 \text{ H}_2\text{O} = 0,01413 \text{ H} = 5,51 \text{ Proc. H}$.
- II. 0,2307 Substanz gaben $0,2356 \text{ BaSO}_4 = 0,03236 \text{ S} = 14,03 \text{ Proc. S}$.
- III. 0,3386 Substanz gaben bei 18° und 762 mm Druck $17,7 \text{ ccm}$ feuchten $\text{N} = 0,0205 \text{ N} = 6,05 \text{ Proc. N}$.

Berechnet für die Formel $\text{C}_{11}\text{H}_{13}\text{NSO}_3$:

$\text{C} = 55,23 \text{ Proc.}$, $\text{H} = 5,44 \text{ Proc.}$, $\text{S} = 13,39 \text{ Proc.}$, $\text{N} = 5,86 \text{ Proc.}$

α -Carbaminthiomilchsäureanilid

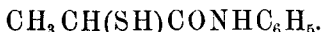


15 g α -Brompropionsäure und 9 g Anilin wurden in etwa 100 ccm Alkohol gelöst und die Lösung mit 10 g Rhodankalium einige Zeit auf dem Wasserbade erhitzt. Nach dem Erkalten wurde Wasser hinzugefügt, so dass sich das entstandene Anilid ölig abschied und das ausgeschiedene Chlorkalium in Lösung ging. Durch Impfen mit einer kleinen Menge des durch Reiben mit einem Glasstabe festgewordenen Körpers wurde die ganze Menge desselben leicht krystallinisch erhalten und dann in der Weise umkrystallisirt, dass die kalte alkoholische Lösung bis zur schwachen Trübung mit Wasser versetzt und mit einigen zurückbehaltenen Krystallen geimpft wurde. Es schieden sich glänzende Blättchen aus, welche bei 117° schmolzen, sich leicht in Alkohol lösten, in Wasser aber unlöslich waren.

Analysen:

- I. 0,2899 Substanz gaben $0,5648 \text{ CO}_2 = 0,1540 \text{ C} = 53,12 \text{ Proc. C}$,
und $0,1350 \text{ H}_2\text{O} = 0,0150 \text{ H} = 5,17 \text{ Proc. H}$.
II. 0,1905 Substanz gaben $0,1988 \text{ BaSO}_4 = 0,0273 \text{ S} = 14,33 \text{ Proc. S}$.
III. 0,1615 Substanz gaben bei 17° und 756 mm Druck $17,5 \text{ ccm}$
feuchten $\text{N} = 0,0202 \text{ N} = 12,50 \text{ Proc. N}$.
Die Formel $\text{C}_{10}\text{H}_{12}\text{N}_2\text{SO}_2$ verlangt:
 $\text{C} = 53,57 \text{ Proc.}$, $\text{H} = 5,35 \text{ Proc.}$, $\text{S} = 14,28 \text{ Proc.}$, $\text{N} = 12,50 \text{ Proc.}$

α -Thiomilchsäureanilid

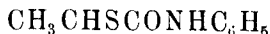


Zur Darstellung dieser Verbindung wurde das Carbaminthiomilchsäureanilid mit 10procentiger Ammoniakflüssigkeit bis zur fast völlig erfolgenden Lösung erhitzt und diese dann in der bei der Darstellung des Thioglycolsäureanilids näher beschriebenen Weise mit verdünnter Salzsäure versetzt, wodurch das Thiomilchsäureanilid sich zunächst ölig abschied, aber leicht durch Reiben mit einem Glasstabe krystallinisch erhalten wurde. Die Reinigung der Verbindung erfolgte ebenso wie bei dem Carbaminthiomilchsäureanilid. Auf diese Weise wurden farblose Blättchen erhalten, welche bei 91° schmolzen.

Analysen:

- I. 0,2200 Substanz gaben $0,4790 \text{ CO}_2 = 0,1306 \text{ C} = 59,36 \text{ Proc. C}$,
und $0,1228 \text{ H}_2\text{O} = 0,01364 \text{ H} = 6,20 \text{ Proc. H}$.
II. 0,2420 Substanz gaben $0,3065 \text{ BaSO}_4 = 0,04209 \text{ S} = 17,39 \text{ Proc. S}$.
Die Formel $\text{C}_9\text{H}_{11}\text{NSO}$ verlangt:
 $\text{C} = 59,66 \text{ Proc.}$, $\text{H} = 6,07 \text{ Proc.}$, $\text{S} = 17,67 \text{ Proc.}$

α -Dithiomilchsäureanilid



Eine alkoholische Lösung des Thiomilchsäureanilids wurde zunächst mit Eisenchlorid bis zur Gelbfärbung versetzt und dann Wasser hinzugefügt. Der erhaltene krystallinische Niederschlag wurde aus verdünntem Alkohol umkrystallisirt und lieferte so farblose, bei 160° schmelzende Nadeln.

Analyse:

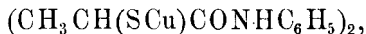
- 0,2042 Substanz gaben $0,4508 \text{ CO}_2 = 0,1229 \text{ C} = 60,13 \text{ Proc. C}$, und
 $0,1064 \text{ H}_2\text{O} = 0,0118 \text{ H} = 5,77 \text{ Proc. H}$.

Die Formel $C_{18}H_{20}N_2S_2O_2$ verlangt:

$C = 60,06 \text{ Proc.}, H = 5,55 \text{ Proc.}$

Dieselbe Verbindung wurde auch erhalten durch Oxydation einer ammoniakalischen Lösung des Thiomilchsäureanilids durch Kupfersulfatlösung. Gleichzeitig entstand hierbei das

Cuprothiomilchsäureanilid



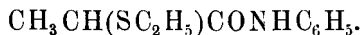
welches feucht eine grüngelbe Farbe besitzt, trocken ein grünlich-braunes amorphes Pulver darstellt.

Analyse:

0,0822 Substanz gaben $0,0263 Cu_2S = 0,02097 Cu = 25,51 \text{ Proc. Cu.}$

Die Formel $C_{18}H_{20}N_2S_2O_2Cu_2$ verlangt $25,92 \text{ Proc. Cu.}$

α -Aethylthiomilchsäureanilid



Dasselbe wurde aus Thiomilchsäureanilid, Jodäthyl und alkoholischer Kalilauge in genau derselben Weise dargestellt und umkrystallisirt wie das Aethylthioglycolsäureanilid. Es stellt farblose Blättchen dar, welche bei 97° schmelzen, in Alkohol sehr leicht löslich, in Wasser unlöslich sind.

Analysen:

0,2540 Substanz gaben $0,5815 CO_2 = 0,1586 C = 62,44 \text{ Proc. C}$ und

$0,1664 H_2O = 0,01849 H = 7,28 \text{ Proc. H.}$

Die Formel $C_{11}H_{15}NSO$ verlangt:

$C = 62,67 \text{ Proc.}, H = 7,17 \text{ Proc.}$

α -Carbaminthiooxybuttersäureanilid



Diese Verbindung wurde aus α -Brombuttersäure, Anilin und Rhodankalium in gleicher Weise erhalten wie das Carbaminthiomilchsäureanilid. Es stellt glänzende Blättchen dar, welche bei 120° schmelzen, leicht in Alkohol löslich, in Wasser unlöslich sind.

Analysen:

I. 0,2553 Substanz gaben $0,5236 CO_2 = 0,1428 C = 55,82 \text{ Proc. C}$ und $0,1346 H_2O = 0,01495 H = 5,84 \text{ Proc. H.}$

II. 0,3108 Substanz gaben $0,3070 BaSO_4 = 0,04216 S = 13,56 \text{ Proc. S.}$

III. 0,2092 Substanz gaben bei 17° und 750 mm Druck 22 ccm feuchten $N = 0,02519 N = 12,04 \text{ Proc. N.}$

Berechnet für die Formel $C_{11}H_{12}N_2SO_2$:
C = 55,46 Proc., H = 5,88 Proc., N = 11,76 Proc., S = 13,44 Proc.

α -Thiooxybuttersäureanilid



Carbaminthiooxybuttersäureanilid wurde mit Alkohol und 10 procentiger Ammoniakflüssigkeit bis zur Lösung erhitzt und mit verdünnter Salzsäure versetzt, wodurch das Thiooxybuttersäureanilid sich ölig abschied und wie das Thiomilchsäureanilid krystallinisch erhalten werden konnte. Es stellt farblose, feine Nadeln dar, welche bei 95° schmelzen.

Analysen:

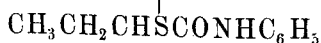
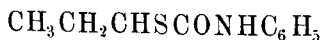
- I. 0,2087 Substanz gaben $0,2480 BaSO_4 = 0,03406 S = 16,32 \text{ Proc. S.}$
II. 0,3000 Substanz gaben bei 24° und 751 mm Druck 20 ccm feuchten
N = 0,02215 N = 7,36 Proc. N.

Die Formel $C_{10}H_{13}NSO$ verlangt:

S = 16,41 Proc., N = 7,18 Proc.

Durch Oxydation mit Eisenchlorid in neutraler und mit Kupfersulfat in ammoniakalischer Lösung konnte aus dem Thiooxybuttersäureanilid leicht das

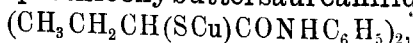
α -Dithiooxybuttersäureanilid



erhalten werden, welches, aus verdünntem Alkohol umkrystallisirt, feine, farblose Nadeln darstellt, welche bei 110° schmelzen.

Bei der Oxydation mittelst Kupfersulfat entstand auch hier neben dem Dithiooxybuttersäureanilid das

Cuprothiooxybuttersäureanilid



welches in seinem Aussehen der Kupferverbindung des Thio-glycolsäureanilids gleicht.

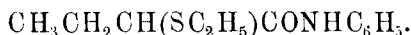
Analyse:

- 0,3542 Substanz gaben $0,2200 Cu_2S = 0,0877 Cu = 24,76 \text{ Proc. Cu.}$
Die Formel $C_{20}H_{24}N_2S_2O_2Cu$ verlangt 24,90 Proc. Cu_2 .

Bei der Oxydation einer alkoholischen Lösung des Thiooxybuttersäureanilids mit Eisenchlorid treten eigenthümliche Farben-

erscheinungen auf, indem jeder Zusatz von Eisenchlorid eine tief dunkelviolette Färbung erzeugt, welche aber bald wieder verschwindet und bei einem Ueberschuss von Eisenchlorid einer rein gelben Farbe Platz macht. Fügt man dann Wasser hinzu, so entsteht zunächst eine milchige Trübung und erst nach längerem Stehen scheidet sich die Dithioverbindung krystallinisch ab.

α -Aethylthiooxybuttersäureanilid



Diese Verbindung wurde aus Thiooxybuttersäureanilid, Jodäthyl und alkoholischer Kalilauge in derselben Weise erhalten und gereinigt wie das Aethylthioglycolsäureanilid. Es stellt feine, farblose Nadeln dar, welche bei 68° schmelzen.

Analyse:

0,2067 Substanz gaben 0,2128 $\text{BaSO}_4 = 0,02922 \text{ S} = 14,13 \text{ Proc. S.}$

Die Formel $\text{C}_{12}\text{H}_{17}\text{NSO}$ verlangt 14,35 Proc. S.

Die umfangreichen Untersuchungen über die Anilide der Thiooxyfettsäuren haben wir an dieser Stelle abgebrochen. Ueber die im Laboratorium für pharmaceutische Chemie von unseren Schülern weiter fortgesetzten Untersuchungen wird an anderer Stelle berichtet werden.

DIE UNTERSUCHUNG
VON
COMPLEXEN VERBINDUNGEN.

VON
G. BODLÄNDER.

Als complexe Verbindungen im weiteren Sinne kann man Verbindungen bezeichnen, die bei der mehr oder minder leicht eintretenden Zersetzung nicht direct in die elementaren Bestandtheile, sondern in andere einfachere Verbindungen zerfallen. Sie entstehen durch Addition für sich existenzfähiger, einfacher Molecüle an einander. Es sind hierher in erster Linie die Doppelsalze zu rechnen, welche durch Vereinigung zweier einfacher Salze entstehen, z. B. das Kaliumplatinchlorid, das aus Chlorkalium und Platinchlorid, der Alaun, der aus Aluminiumsulfat und Kaliumsulfat gebildet wird. Dann gehören hierher die Hydrate, die diesen ähnlichen Alkoholverbindungen, die Verbindungen mit Krystallbenzol etc., ferner die Verbindungen von Salzen mit Ammoniak und mit Aminen, unter denen die Verbindungen der Cobaltisalze das bekannteste Beispiel bilden. Komplexe Verbindungen, deren einer Bestandtheil ein Element ist, sind die Perjodide und Perbromide, die durch Vereinigung von Jodiden mit Jod und von Bromiden mit Brom entstehen. Auch die complexen Säuren, wie sie sich durch Vereinigung von Salzen mit Säuren oder von Säuren mit Säureanhydriden bilden, z. B. die Platinchlorwasserstoffsäure, $\text{PtCl}_4 \cdot 2\text{HCl}$, und die Phosphorwolframsäuren, $\text{H}_3\text{PO}_4 \cdot n\text{WO}_3$, sind hierher zu rechnen. Die früher herrschende dualistische Anschauungsweise fasste auch die einfachen Salze zum grossen Theil als complexe Verbindungen auf, d. h. als Verbindungen, die nicht direct aus den Elementen, sondern aus ihren Oxyden oder Sulfiden zusammengesetzt sind; so wurde das Kaliumsulfat als Verbindung von SO_3 und K_2O , das Rothgültigerz als Verbindung von Sb_2S_3 mit $3\text{Ag}_2\text{S}$ aufgefasst, während das, was heute als eine Säure angesehen wird, für eine complexe Verbindung eines Oxyds mit Wasser galt. Diese Auffassung ist deswegen verlassen worden, weil sich eine vollständige Analogie zwischen den anscheinend complexen und zweifellos einfachen Verbindungen ergab, z. B. zwischen Salpeter-

säure und Salzsäure, zwischen Kaliumchlorid und Kaliumnitrat. Man ging dazu über, sich für die Sauerstoffsäuren und Sauerstoffsalze ein auf directer Verkettung der Atome beruhendes Konstitutionsbild zu entwerfen.

Es lag nahe, auch die übrigen complexen Verbindungen einheitlich aufzufassen, auch für die Hydrate, Doppelsalze, Ammoniakverbindungen nach einfachen Formelbildern zu suchen. Es zeigte sich aber bald, dass die Annahme einer constanten Valenz der Elemente, welche eine so ausgezeichnete Classification der organischen Verbindungen ermöglicht hatte, bei den anorganischen Verbindungen versagte. Es war allenfalls möglich, für die einfachen Säuren, Basen und Salze auf Grund einer für jedes Element constanten Valenz Constitutionsformeln zu construiren; es war aber völlig unmöglich, solche Formeln auch für die Verbindungen von complicirter Zusammensetzung zu ersinnen, geschweige denn, sie als besten Ausdruck des Verhaltens der Verbindungen nachzuweisen.

Weil die Valenzen der Atome nicht ausreichten, den Zusammenhalt der Hydrate und Doppelsalze zu erklären, nahm man an, dass in den complexen Verbindungen die geschlossenen Molecüle mit einander durch irgend welche, nicht rein chemische Kräfte verkettet seien. Es war damit der Chemie die Aufgabe genommen, für den Zusammenhalt der complicirteren Verbindungen mit den vorhandenen Annahmen eine Erklärung zu geben. Man bezeichnete diese Verbindungen als Molecülverbindungen und beschränkte sich darauf, nur für die Einzelmolecüle Structurformeln aufzustellen. Dieser Ausweg wurde noch dadurch erleichtert, dass Sohnke Anschauungen über die Krystallstructur entwickelte, nach denen Verbindungen zwischen den Molecülen im stöchiometrischen Verhältniss dadurch zu Stande kommen, dass das Raumgitter, welches den krystallographischen Aufbau einer Substanz darstellt, auch im Stande ist, das Raumgitter einer anderen Substanz in sich aufzunehmen. Durch diese Auffassung war es möglich, die Existenz der complexen Verbindungen im krystallisirten Zustande als von chemischen Kräften unabhängig anzusehen. Sie verlangte aber, dass die complexen Verbindungen nur im krystallisirten Zustande bestehen.

Dafür, dass letzteres der Fall sei, sprachen viele Gründe.

Während rein chemische Verbindungen im Allgemeinen eine grosse Beständigkeit gegen grosse Veränderungen der Temperatur und des Druckes zeigen, werden viele von den complexen Verbindungen, die man auch als Molecül- oder Additionsverbindungen bezeichnete, schon bei geringen Aenderungen des Druckes oder der Temperatur zersetzt. Das gilt namentlich für die Hydrate, die zum Theil schon bei gewöhnlicher Temperatur im trockenen Raum ihr Krystallwasser abspalten, und es gilt auch für die complexen Ammoniakverbindungen, z. B. diejenigen des Chlorsilbers, welches je nach dem Ammoniakdruck und der Temperatur Verbindungen mit drei oder anderthalb Molecülen Ammoniak bildet oder das Ammoniak gänzlich abspaltet. Von den Doppelsalzen werden viele schon bei Behandlung mit Wasser anscheinend vollständig zerlegt. Am meisten tritt das hervor, wenn die eine Componente des Doppelsalzes in Wasser wenig löslich ist. So wird das Doppelsalz aus Calciumcarbonat und Natriumcarbonat, der Gaylussit, durch Wasser vollständig zerlegt. Dasselbe gilt für Doppelsalze aus Jodsilber und Silbernitrat und viele andere. Auch wo beide Componenten leicht löslich sind, treten solche Zerlegungen durch Lösungsmittel leicht ein, z. B. beim Carnallit, aus dessen concentrirten Lösungen sich nicht das aus Chlorkalium und Chlormagnesium bestehende Doppelsalz, sondern die Hauptmenge des Chlorkaliums für sich ausscheidet. Indessen sind diese Unterschiede complexer und einfacher Verbindungen nicht genügend gross, um eine scharfe Grenze zu bedingen. — Auch anscheinend einfache Verbindungen, wie das Calciumcarbonat, das Baryumsuperoxyd, der Jodwasserstoff, werden durch Aenderungen von Druck und Temperatur zerlegt. Die sauren Salze, die man als einfache Verbindungen anzusehen geneigt ist, weil sie in das Valenzschema hineinpassen, werden durch Wasser vielfach in Säure und neutrales Salz gespalten, was z. B. bei den sauren Sulfaten sich oft zeigt. Andererseits besitzen viele anscheinend complexe Verbindungen eine sehr grosse Beständigkeit, auch gegen Lösungsmittel. Das Natriumplatinchlorid löst sich in Alkohol sehr leicht und ohne Zersetzung. Wäre seine Existenz nur an den festen Zustand gebunden, so dürfte sich bei Behandlung mit Alkohol nur das Platinchlorid lösen, während das in Alkohol unlösliche Chlornatrium zurückbleiben müsste. Ferrocyanwasserstoff und Ferricyanwasserstoff müssten an der Luft

das Cyanwasserstoffgas abspalten, wenn es nicht chemisch zurückgehalten würde.

Dass von den complexen Salzen wenigstens ein Theil auch in den Lösungen vorhanden ist, ging mit Sicherheit aus den Versuchen von Hittorf über die Ueberführungszahlen hervor. Das Gleiche ergab sich aus den Versuchen von Rüdorff über die Diffusion in Lösungen complexer Salze. Als aber die osmotische Theorie der Lösungen aufgestellt wurde, wuchs die Anzahl der Methoden, nach denen der Zustand der complexen Salze in den Lösungen untersucht werden konnte, stark an. Zugleich erhielt aber auch die Feststellung, dass ein complexes Salz als solches in der Lösung vorhanden sei, eine erhöhte Bedeutung. Da die gelösten Stoffe, ebenso wie in den Gasen, meist in Form einfacher Molecüle oder ihrer Ionen vorhanden sind, so war die Nothwendigkeit gegeben, für den Zusammenhalt der einzelnen Atome in diesen complexen Molecülen ganz ebenso eine Erklärung zu suchen, wie sie die Valenzlehre für die auch früher als einfach erkannten Molecüle zu geben beansprucht. Es muss festgestellt werden, welche complexen Verbindungen in den Lösungen vorhanden sind. Es genügt nicht, den Nachweis zu führen, dass bei der Lösung eines complexen Salzes die Lösung complexe Molecüle enthält. Es muss auch ermittelt werden, ob diese complexen Molecüle auch dieselbe Zusammensetzung besitzen wie die Krystalle, welche zur Herstellung der Lösung gedient haben. Es wäre immerhin möglich, dass ein Theil der festen complexen Salze nur in Folge einer gewissen Krystallstructur besteht und nur ein Theil auch in Form gelöster Molecüle, sowie dass andererseits die Lösung complexe Verbindungen enthalten kann, welche im festen Zustande nicht existiren. Es kann mit Sicherheit vorausgesagt werden, dass genaue Untersuchungen dieses Gegenstandes das Gebiet der anorganischen Chemie sehr wesentlich erweitern werden, insofern die Anzahl der von ihr zu behandelnden Verbindungen sehr stark vervielfacht wird, wenn zu den einfachen Salzen auch die complexen hinzukommen. Sind die Formeln der in Lösungen existenzfähigen complexen Molecüle genau und in grösserer Anzahl bekannt, so wird es uns auch eher möglich sein, Gesetzmässigkeiten in dem Wechsel der Valenzen aufzufinden; denn

dass bei den anorganischen Elementen die Valenz nicht constant ist, wird eine genauere Untersuchung der complexen Verbindungen mit noch grösserer Sicherheit ergeben. Zugleich bietet es ein erhöhtes Interesse, die Festigkeiten quantitativ zu vergleichen, mit der sich die Einzelmoleküle zu complexen Molekülen vereinigen. Es kommt nicht nur darauf an, festzustellen, wie viele Atome und Atomgruppen sich mit einem Atom eines Elementes vereinigen können, sondern auch, mit welcher Festigkeit die einzelnen gebunden werden. Es haben sich schon jetzt gewisse Regelmässigkeiten ergeben, in Bezug auf die Neigung gewisser Ionen bildender Elemente geschlossene Moleküle unter Bildung von complexen Ionen zu addiren. Es kann die Stärke dieser Tendenz nicht aus der Zahl der addirten Moleküle erschlossen werden. Ist doch die Tendenz, mit der Silicium sich mit Wasserstoff verbindet, sicher viel kleiner als die, mit der Chlor und Wasserstoff sich vereinigen. Trotzdem ist die Zahl der aufgenommenen Wasserstoffatome in dem einen Falle vier Mal so gross wie im anderen. Ebenso kann die Bindung zwischen Metallion und Ammoniakmolekülen, bei einem Metall, das weniger Ammoniakmoleküle addirt, fester sein als bei einem anderen, das sich mit mehr Ammoniakmolekülen verbindet.

Zur Untersuchung complexer Salze in ihren Lösungen sind ausser den Ueberführungszahlen und der Diffusion noch angewandt worden die Methoden, welche auf der Aenderung des osmotischen Druckes beruhen, also namentlich die Gefrierpunkts-erniedrigung, ferner das Verhältniss der Leitfähigkeit einer gemischten Lösung zur Leitfähigkeit der Lösungen der einzelnen Salze, die Erhöhung der Löslichkeit, welche ein Stoff auf einen Zusatz eines anderen erfährt, mit dem er eine complexe Verbindung bilden kann, ferner die Aenderung der Farbe, Lichtbrechung, Dichte von Lösungen auf Zusatz von Stoffen, die complexe Verbindungen bilden können. Für die Untersuchung von Ammoniakcomplexen haben Abegg und seine Schüler und Dawson und Mac Crae auch die Aenderung der Dampfspannung von Ammoniak auf Zusatz von Salzen zu seinen wässerigen Lösungen zu benutzen gesucht. In vielen Fällen bieten auch die chemischen Reactionen von Lösungen einen Anhalt dafür, ob zwei in ihnen enthaltene Stoffe mit einander eine complexe Verbindung gegeben

haben. Während gewisse Doppelverbindungen sich in sehr verdünnten Lösungen so verhalten, wie wenn sie vollständig in die Einzelsalze bzw. ihre Ionen gespalten wären, geben andere Reactionen, die von denen der Einzelsalze erheblich abweichen. Als Typus der ersten Classe kann man die Alaune, als den der zweiten Classe das Ferrocyankalium auffassen. Ostwald unterschied die Doppelverbindungen der ersten Classe als Doppelsalze — zu denen dann auch die Hydrate, Ammoniakverbindungen etc. zu rechnen wären — von den eigentlichen complexen Salzen. Es lässt sich jedoch ein scharfer Unterschied zwischen beiden nicht feststellen. Gewisse complexe Salze im engeren Sinne geben mit dem einen Reagens die Reaction der Einzelionen, mit einem anderen nicht. Kaliumzinkcyanid scheint kein einfaches Doppelsalz aus Zinkcyanid und Cyankalium zu sein, wenn man es mit Natriumcarbonat versetzt, mit dem es abweichend von anderen Zinksalzen kein Zinkcarbonat giebt, während es mit Schwefelnatrium wie andere Zinksalze Schwefelzink giebt. Das analoge Kaliumcuprocyanid verhält sich gegen beide Agentien wie ein complexes Salz. Es wird auch durch Schwefelnatrium kein Schwefelkupfer gefällt. Andererseits zeigen auch Doppelsalze, die in verdünnten Lösungen sich wie Gemische der Einzelsalze verhalten, in concentrirteren Eigenschaften, die sich nur durch die Annahme deuten lassen, dass sie neben den einfachen auch complexe Verbindungen enthalten.

Es sollen daher im Folgenden alle Verbindungen als complexe bezeichnet werden, die man sich als aus zwei Einzelmoleculen durch Addition aufgebaut denken kann, vorausgesetzt, dass sie im Gaszustande oder in Lösung überhaupt noch nachweisbar existiren. Ob das der Fall ist, muss in jedem Einzelfalle untersucht werden und ebenso wie gross der Zusammenhalt der näheren Bestandtheile ist. Die Zusammensetzung und die Beständigkeit der complexen Verbindungen in den Lösungen oder im Gaszustande festzustellen, ist eine Aufgabe, die in den meisten Fällen noch der Lösung bedarf.

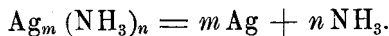
Einen gewissen Anhalt über die Zusammensetzung eines gelösten complexen Salzes erhält man oft aus der Löslichkeit des einen Bestandtheiles in Gegenwart des anderen. Das ist namentlich der Fall, wenn der eine Bestandtheil in

Wasser fast unlöslich ist und nur durch einen Ueberschuss des anderen Bestandtheiles in Lösung gehalten werden kann. Ein solcher Fall liegt z. B. vor bei der Auflösung von Chlorsilber in Ammoniak oder von Kupferchlorür in Chlorkalium oder von Silberjodid in Silbernitrat. Wenn dagegen beide Componenten eines complexen Salzes schon für sich in Wasser leicht löslich sind, wie beim Kaliummercurichlorid, oder wenn das complexe Salz nur so wenig in seine Componenten gespalten ist, dass kein Ueberschuss der einen Componente nöthig ist, um das Salz vor der Zersetzung zu schützen, wie beim Kaliumsilbercyanid, ist es schwer oder unmöglich, aus der Löslichkeit die Zusammensetzung des complexen Salzes zu ermitteln. Aber auch in den oben angeführten und analogen Fällen erhält man aus der Untersuchung der Löslichkeit keine eindeutigen Resultate.

Die complexen Salze dissociiren elektrolytisch meist in ein einfaches Ion und ein complexes Ion. Das complexe Ion selbst ist aus einem einfachen Ion und einem Neutraltheil aufgebaut, d. h. einem in sich geschlossenen Molecül. So ist das complexe Ion des Kaliumplatinchlorids aufgebaut aus Chlorionen und dem Platintetrachlorid als Neutraltheil, die complexen Ionen der Kobaltiaxsalze aus dem Kobaltion und den Ammoniakmoleculen als Neutraltheil. Wo ein Ueberschuss der einen Componente eines complexen Salzes in der Lösung nöthig ist, um das complexe Salz vor der Zersetzung zu schützen, ist zu unterscheiden, ob die überschüssige gelöste Componente in das complexe Ion vollständig als Neutraltheil eintritt, oder ob sie für das complexe Ion nur das einfache Ion liefert. Das erstere ist z. B. der Fall bei den Lösungen von Chlorsilber in Ammoniak, wo das Ammoniak der neutrale Bestandtheil eines complexen Silberammoniakions ist, das zweite bei dem Kaliumsilberjodid oder Kaliumcupchlorid, wo das Jod oder Chlor als Ion mit dem Jodsilber oder Cuprochlorid als Neutraltheil das complexe Ion bildet.

Bei der Auflösung von Chlorsilber in Ammoniak entstehen Verbindungen der allgemeinen Formel $(\text{AgCl})_m(\text{NH}_3)_n$. Da sich Ammoniak selten an Anionen addirt, so kann es keinem Zweifel unterliegen, dass das complexe Salz elektrolytisch in Chlorionen und die complexen Ionen $\text{Ag}_m(\text{NH}_3)_n$ dissociirt ist. Diese sind zum

geringen Theil gespalten nach der Gleichung



Daraus ergibt sich nach dem Massenwirkungsgesetz die Gleichgewichtsbedingung:

$$(\text{Ag})^m \cdot (\text{NH}_3)^n = k_1 (\text{Ag}_m [\text{NH}_3]_n).$$

Bezeichnen wir mit D die Gesamtmenge des gelösten complexen Silbersalzes, mit α seinen Dissociationsgrad, so ist:

$$(\text{Ag})^m \cdot (\text{NH}_3)^n = k_1 D \cdot \alpha.$$

Untersuchen wir die Löslichkeit des Chlorsilbers in Ammoniak, so hat Chlorsilber als Bodenkörper eine constante active Masse. Es ist also auch in seiner Lösung das Product aus der Concentration der Chlorionen in die Concentration der Silberionen constant:

$$(\text{Cl}) \cdot (\text{Ag}) = k_2.$$

Daraus ergibt sich:

$$(\text{NH}_3)^n = \frac{k_1}{k_2^m} \cdot (\text{Cl})^m \cdot D \cdot \alpha.$$

In der ammoniakhaltigen Lösung sind Chlorionen nur durch Dissociation des Chlorsilberammoniaks vorhanden; es ist also $\text{Cl} = m \cdot D \cdot \alpha$. Mithin ist:

$$(\text{NH}_3)^n = \frac{k_1}{k_2^m} \cdot m \cdot D^{m+1} \cdot \alpha^{m+1}.$$

Wir können, da k_1 , k_2 , n und m constant sein müssen, eine neue Constante K einführen und erhalten:

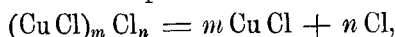
$$(D \cdot \alpha)^{\frac{m+1}{n}} = K \cdot (\text{NH}_3). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Experimentell kann festgestellt werden, welche Potenz von $D \cdot \alpha$ dem freien Ammoniak in den mit Chlorsilber gesättigten Lösungen proportional ist. Man erhält, wie unten gezeigt wird, für $\frac{m+1}{n}$ den Werth 1; es ist aber damit die Formel des gelösten Chlorsilberammoniaks noch nicht eindeutig bestimmt. Es kann m die Werthe 1, 2, 3, n die Werthe 2, 3, 4 etc. haben, dem Salz also die Formel $\text{AgCl} \cdot (\text{NH}_3)_2$ oder $(\text{AgCl})_2 (\text{NH}_3)_3$ oder

(AgCl)₃(NH₃)₄ etc. zukommen. In einer früheren Untersuchung¹⁾ hatte ich auf Grund dieser Bestimmungen angenommen, dass das Chlorsilber in Ammoniak in Form derselben Verbindung (AgCl)₂(NH₃)₃ gelöst sei, die auch aus der Lösung krystallisirt. Die unten zu besprechenden Methoden gestatten aber die Einzelwerthe von *m* und *n* festzustellen. Es ergab sich dabei für *m* der Werth 1, für *n* der Werth 2, für das Salz also die Formel A₉Cl(NH₃)₂.

Als Beispiel des zweiten Typus, dass der Bodenkörper als Neutraltheil in das complexe Ion eingeht, während das überschüssige freie Ion den anderen Bestandtheil des complexen Ions liefert, diene das Verhalten des Kupferchlorürs in Lösungen von Chlorwasserstoff oder Chlorkalium.

Kupferchlorür ist für sich in Wasser wenig löslich, löst sich aber leichter bei Gegenwart von Chlorwasserstoff oder Chloralkalien. Die festen Doppelchloride werden durch Wasser zersetzt; es ist ein Ueberschuss eines einfachen löslichen Chlorids nöthig, um die Zersetzung zu verhindern. In den Lösungen in Chlorkalium sind also complexe Salze (CuCl)_{*m*}(KCl)_{*n*} vorhanden, die elektrolytisch zweifellos in Kaliumionen und complexe Anionen (CuCl)_{*m*}Cl_{*n*} dissociirt sind. Bezeichnen wir die Gesammtmenge des gelösten complexen Kupfersalzes mit *D*, seine elektrolytische Dissociation mit *α*, so ist *D.α* die Concentration der complexen Ionen. Es erleiden die complexen Ionen den theilweisen Zerfall:



woraus sich nach dem Massenwirkungsgesetz ergibt:

$$(\text{CuCl})^m \cdot \text{Cl}^n = k_1 D \cdot \alpha.$$

Da das Kupferchlorür Bodenkörper ist, ist seine active Masse also auch (CuCl)^{*m*} constant. Man erhält daher:

$$(\text{Cl})^n = K \cdot D \cdot \alpha. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Es kann experimentell festgestellt werden, welchen Werth *n* besitzt, d. h. welcher Potenz der Concentration der freien Chlorionen die Concentration des gelösten complexen Salzes proportional ist. Man erhält, wie Versuche von Abel²⁾ und von

¹⁾ Das Verhalten von Molecularverbindungen bei der Auflösung. Zeitschr. f. physik. Chemie 9, 730—743, 1892. — ²⁾ Ueber das Gleichgewicht zwischen den verschiedenen Oxydationsstufen desselben Metalles. Zeitschr. f. anorg. Chem. 26, 401 (1901).

Bodländer und Storbeck ergaben, für niedrige Chlorconcentration den Werth 1, für hohe den Werth 2. Daraus ergibt sich, dass das complexe Salz in verdünnten Chlorkaliumlösungen die Formel $(\text{CuCl})_m \text{KCl}$ besitzt, in concentrirteren die Formel $(\text{CuCl})_{m'} (\text{KCl})_2$. Welchen Werth m und m' besitzen, lässt sich aus diesen Bestimmungen nicht ermitteln. Abel nahm willkürlich an, dass $m' = 2$ sei, woraus sich für das in den concentrirteren Chlorkaliumlösungen enthaltene Cuprosalz die Formel $\text{K}_2\text{Cu}_2\text{Cl}_4$ ergibt. Die neue hier zu besprechende Methode gestattet aber die Werthe von m und von n einzeln zu bestimmen; es ist die Formel des Salzes in Wirklichkeit K_2CuCl_3 .

Die neue Methode zur Bestimmung der Zusammensetzung gelöster complexer Salze beruht auf der Messung elektromotorischer Kräfte. Enthält eine Lösung die complexen Ionen $A_m B_n$ und sind neben diesen noch deren Dissociationsproducte A und B vorhanden, so gilt die Gleichgewichtsbedingung:

$$(A)^m \cdot (B)^n = k (A_m B_n).$$

Sind A die Ionen eines Metalles, welches eine umkehrbare Elektrode bilden kann, so kann in zwei Lösungen, deren Gehalt an B oder an den complexen Ionen $A_m B_n$ variirt wird, die damit verbundene Aenderung der Concentration von A vermittelt Concentrationsketten bestimmt werden. Sind in der zweiten Lösung die Concentrationen $(A)_1$, $(B)_1$, $(A_m B_n)_1$, so gilt

$$\frac{(A)^m}{(A)_1^m} = \frac{(A_m B_n)}{(A_m B_n)_1} \cdot \frac{(B)_1^n}{(B)^n}.$$

Man stellt zwei Lösungen so her, dass die Concentration des Bestandtheiles B in beiden gleich gross, die von $A_m B_n$ verschieden ist. Es ist dann

$$\frac{(A)}{(A)_1} = \sqrt[m]{\frac{(A_m B_n)}{(A_m B_n)_1}}.$$

Man bestimmt das Concentrationsverhältniss $(A):(A)_1$, indem man mit Hülfe von zwei Elektroden, die aus dem Metall von A bestehen, eine Concentrationskette aus den beiden Lösungen misst. Ist r die Werthigkeit der Ionen A , so ist die elektromotorische Kraft der Concentrationskette, abgesehen von einem meist verschwindenden Correctionsglied:

$$E = \frac{0,058}{r} \log \frac{(A)}{(A)_1} = \frac{0,058}{r \cdot m} \log \frac{(A_m B_n)}{(A_m B_n)_1}.$$

Da r bekannt ist, kann man m leicht aus der elektromotorischen Kraft und dem Concentrationsverhältniss der complexen Ionen berechnen. Das letztere ist bei grosser Verdünnung gleich dem Concentrationsverhältniss des complexen Salzes oder des gelösten Metalls, wenn dieses nur in Form dieser complexen Ionen, nicht auch noch in Form einfacher Ionen oder in Form anderer complexer Ionen vorhanden ist. Eine Controle hierfür besitzt man unter anderem darin, dass in der Gleichung:

$$m = \frac{0,058}{r \cdot E} \cdot \log \frac{(A_m B_n)}{(A_m B_n)_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

m nahezu eine ganze Zahl sein muss

Selbst die Kenntniss von r , d. h. der Werthigkeit der einfachen Metallionen, ist nicht nöthig, wenn man nur ihr Aequivalentgewicht kennt. Bei der Untersuchung complexer Kupfersalze kann es zweifelhaft sein, ob die Cuproionen die Formel Cu^+ oder Cu_2^+ besitzen. Im ersteren Falle hätte r den Werth 1, im anderen den Werth 2. Wenn die Cuproionen einatomig sind, gilt für die complexen Ionen die Gleichung:

$$A_m B_n = m A + n B.$$

$$(A)^m \cdot (B)^n = k (A_m B_n); \quad E = \frac{0,058}{m} \log \frac{(A_m B_n)}{(A_m B_n)_1}.$$

Sind die Cuproionen zweiatomig, so geben zwei complexe Ionen m zweierwerthige Cuproionen. Es ist

$$2 A_m B_n = m A_2 + 2 n B$$

$$(A_m B_n)^2 = k (A_2)^m \cdot B^{2n}.$$

Es ist also bei constantem Werth von B :

$$\frac{(A_2)_1}{(A_2)} = \sqrt[m]{\frac{(A_m B_n)_2}{(A_m B_n)_1^2}}$$

$$E = \frac{0,058}{\frac{2 \cdot m}{2}} \log \frac{(A_m B_n)}{(A_m B_n)_1} = \frac{0,058}{m} \log \frac{(A_m B_n)}{(A_m B_n)_1}.$$

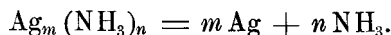
Man erhält also durch Messung der elektromotorischen Kraft direct die Anzahl der Einzelatome in dem complexen Ion, wobei es gleichgültig ist, ob die Einzelatome als freie Ionen für sich existiren können.

Für genaue Bestimmungen wäre es auch nöthig, die elektromotorische Kraft an der Berührungsstelle der beiden Lösungen in Betracht zu ziehen. Die Nothwendigkeit fällt aber in solchen Fällen weg, in denen neben den complexen Ionen Ionen anderer Elektrolyte in genügend grosser Menge vorhanden sind. Das gilt z. B. bei den Untersuchungen über complexe Salze von der Art des Kaliumkupferchlorürs, welche immer einen beträchtlichen Ueberschuss der einen Componente, des Chlorkaliums, enthalten müssen, das in beiden Lösungen gleiche Concentration besitzt. Die Menge n der Atome von B , die in dem complexen Salz vorhanden sind, lässt sich aus der Zahl m der Atome von A und dem durch die Löslichkeit gegebenen Verhältniss $n:(m+1)$ berechnen. Wenn aber die Dissociation des complexen Salzes in seine Componenten sehr gering ist, wenn, wie z. B. beim Kaliumsilbercyanid schon eine minimale, quantitativ gar nicht bestimmbare Menge der freien Ionen genügt, um die Spaltung der complexen Ionen zu verhindern, ist die Anwendung der Löslichkeitsmethode und damit die Bestimmung von n auf diesem Wege ausgeschlossen.

Allgemein anwendbar ist aber auch in solchen Fällen die Untersuchung einer zweiten Art von Concentrationsketten. Man stellt sich zwei Lösungen her, die von den complexen Ionen gleich viel, dagegen von der einen Componente der complexen Ionen verschiedene Mengen enthalten, und misst die Concentrationskette mit dem Schwermetall, welches Bestandtheil der complexen Ionen ist. Wenn wir z. B. die Zusammensetzung der complexen Ionen untersuchen wollen, die sich bei der Auflösung des Chlorsilbers in Ammoniak bilden, so können wir von vornherein annehmen, dass das Silber in ihnen im complexen Ion vorhanden ist, eine Annahme, die sich aus der grossen Tendenz des Ammoniaks ergibt, mit Metallionen zusammenzutreten und die durch

die Reactionen der Lösungen von Chlorsilber in Ammoniak und durch die nachfolgend erwähnten Untersuchungen bestätigt wird.

Es enthalten also die Lösungen Ionen der Formel $\text{Ag}_m(\text{NH}_3)_n$. Diese sind zum sehr geringen Theil dissociirt nach der Gleichung



Daraus ergibt sich die Gleichgewichtsbedingung

$$(\text{Ag})^m \cdot (\text{NH}_3)^n = k \cdot (D \cdot \alpha),$$

wo wir mit D die Concentration des complexen Salzes, mit α seinen elektrolytischen Dissociationsgrad bezeichnen. Stellen wir zwei Lösungen her, die gleich viel von dem complexen Salz enthalten, aber verschiedene Mengen Ammoniak, so wird auch die elektrolytische Dissociation des complexen Salzes $\text{Ag}_m(\text{NH}_3)_n \text{Cl}_m$ in seine Ionen $\text{Ag}_m(\text{NH}_3)_n$ und $m \text{Cl}$ gleich gross sein. Für zwei Lösungen mit den Ammoniakgehalten (NH_3) und $(\text{NH}_3)_1$ ergibt sich dann die Concentration der freien Silberionen (Ag) und $(\text{Ag})_1$:

$$\frac{(\text{Ag})^m}{(\text{Ag})_1^m} = \frac{(\text{NH}_3)_1^n}{(\text{NH}_3)^n}; \quad \frac{(\text{Ag})}{(\text{Ag})_1} = \frac{(\text{NH}_3)_1^{n/m}}{(\text{NH}_3)^{n/m}}.$$

Eine Concentrationskette aus den beiden Lösungen mit Silber als Elektroden hat dann, da das Silber einwerthig ist, die elektromotorische Kraft:

$$E = 0,058 \log \frac{(\text{Ag})}{(\text{Ag})_1} = \frac{0,058 n}{m} \log \frac{(\text{NH}_3)_1}{(\text{NH}_3)}.$$

Daraus ergibt sich:

$$\frac{n}{m} = \frac{E}{0,058 \log \frac{(\text{NH}_3)_1}{(\text{NH}_3)}} \quad \dots \quad (4)$$

Man kann auch, wenn das Verhältniss $n:m$ bekannt ist, durch die elektromotorische Kraft das Verhältniss der Ammoniakconcentrationen in den beiden Lösungen messen, oder in anderen Fällen das Verhältniss der Concentrationen anderer Bestandtheile von Complexsalzen, auch solcher, die selbst nicht Elektrolyte sind. Ebenso kann man die nicht immer dem Verhältniss der Concentrationen gleichen Verhältnisse der activen Mengen des Nichtelektrolyten oder ihrer Gasdrucke auf diesem Wege bestimmen.

Bei der Ermittlung der Formel von solchen Complexsalzen braucht meist die Flüssigkeitskette an der Grenze der Lösungen von verschiedener Ammoniakconcentration nicht berücksichtigt zu werden, weil der eigentliche Elektrolyt in beiden Lösungen gleiche Concentration besitzt.

Da der Werth von m durch die zuerst beschriebenen Concentrationsketten bestimmt ist, ergibt sich sofort der Werth von n , aus beiden zusammen also die Formel der complexen Ionen. Man kann auch diese Messungen mit den Ergebnissen der beschriebenen Löslichkeitsuntersuchungen combiniren und erhält dann aus den Verhältnissen $n:m$ und $(m+1):n$ die Einzelwerthe m und n . Beide müssen angenähert ganze Zahlen sein. Wenn das nicht der Fall ist, ist das ein Anzeichen, dass die Lösungen verschiedene complexe Ionen in nicht zu vernachlässigenden Verhältnissen neben einander enthalten.

Ist das gelöste complexe Salz aus zwei Einzelsalzen zusammengesetzt, wie z. B. das Kaliumsilbercyanid aus KCN und AgCN, das Kaliumcuprochlorid aus KCl und CuCl, so wird es immer leicht sein, festzustellen, welche Ionen der Einzelsalze im Complexion vorhanden sind. Da z. B. die Lösung von Kupferchlorür in Chlorkalium immer überschüssiges Chlorkalium, also viel freie Chlorionen enthält, muss das Kupfer mit einem Theil des Chlors im Complexion sich befinden, weil neben freien Chlorionen bei der geringen Löslichkeit des Kupferchlorürs nur eine minimale Menge freier Cuproionen in der Lösung enthalten sein kann. Dass das Kalium nicht Bestandtheil eines Complexions sein kann, ergibt sich schon aus seiner Stellung in der elektrochemischen Spannungsreihe¹⁾, sowie daraus, dass alle löslichen Chloride die Löslichkeit des Kupferchlorürs in gleicher Weise erhöhen. Es muss deshalb die allgemeine Formel der Complexionen $\text{Cu}_m \text{Cl}_n$ sein. Daraus ergibt sich nach dem Massenwirkungsgesetz für die Concentrationen (Cu) der freien Cuproionen und (Cl) der freien Chlorionen in der Lösung die Beziehung:

$$\begin{aligned} \text{Cu}_m \text{Cl}_n &= m \text{ Cu} + n \text{ Cl} \\ (\text{Cu})^m \cdot (\text{Cl})^n &= k (\text{Cu}_m \text{Cl}_n). \end{aligned}$$

¹⁾ Vergl. Abegg und Bodländer, Die Elektroaffinität, ein neues Princip der chemischen Systematik. Zeitschr. f. anorg. Chem. 20, 453—499. (1899.)

Stellt man zwei Lösungen her, die gleich viel Kupfer als complexe Ionen enthalten, die aber einen verschiedenen Chlorgehalt besitzen, so gilt für die Concentration der freien Cuproionen $(\text{Cu})_1$ und der freien Chlorionen $(\text{Cl})_1$, in der zweiten Lösung die Beziehung:

$$(\text{Cu})^m \cdot (\text{Cl})^n = (\text{Cu})_1^m \cdot (\text{Cl})_1^n$$

$$(\text{Cu}) : (\text{Cu})_1 = (\text{Cl})_1^{\frac{n}{m}} : (\text{Cl})^{\frac{n}{m}}.$$

Daraus ergibt sich für die für Kupfer umkehrbare Concentrationskette der Werth:

$$E = 0,058 \log \frac{(\text{Cu})}{(\text{Cu})_1} = \frac{0,058 n}{m} \log \frac{(\text{Cl})_1}{(\text{Cl})};$$

$$\frac{n}{m} = \frac{E}{0,058 \log (\text{Cl})_1 : (\text{Cl})} \quad \dots \quad (5)$$

Aus den oben erläuterten Gründen ist die Formel dieselbe, auch wenn die freien Cuproionen zwei- oder mehrwerthig sein sollten. Bei Concentrationsketten dieser Art muss noch ein Correctionsglied in Betracht gezogen werden, welches von der verschiedenen Wanderungsgeschwindigkeit der Ionen des im Ueberschuss vorhandenen einfachen Salzes herrührt. Hat das als Beispiel angeführte complexe Salz die Formel KCuCl_2 , sein complexes Anion also die Formel CuCl_2 , so verschwindet bei dem Stromdurchgang von 96540 Coulomb ein Anion CuCl_2 in der für Chlorkalium verdünnten Lösung. Dafür treten in ihr zwei freie Chlorionen auf. In der für Chlorkalium concentrirten Lösung bildet sich ein Ion CuCl_2 und es verschwinden zwei Chlorionen. Es wird also ein Anion CuCl_2 aus der einen in die andere Lösung transportirt, und da beide Lösungen gleich viel von diesen Anionen enthalten, findet dabei weder ein Gewinn noch eine Aufwendung von Arbeit statt. Dagegen wird Arbeit gewonnen, wenn zwei Chlorionen aus der concentrirteren in die verdünnte Lösung transportirt werden. Diese Arbeit wird durch die elektromotorische Kraft gemessen. Da in der verdünnten Lösung ein Anion — das complexe — verschwunden und zwei einfache Anionen neu gebildet sind, ist in ihr ein Ueberschuss von einem Anion vorhanden. Es muss entweder dieses Anion aus der ver-

dünnteren in die concentrirtere Lösung wandern und dabei Arbeit verbrauchen oder es muss ein Kation aus der concentrirteren in die verdünntere Lösung wandern und dabei Arbeit liefern. In Wirklichkeit finden beide Vorgänge in der Grenzschicht statt, und da Chlor und Kalium gleich schnell wandern, heben sich in diesem Falle Gewinn und Verlust an elektromotorischer Kraft in der Grenzschicht auf. Es wird also bei dem Durchgang von 96 540 Coulomb genau die maximale Arbeit gewonnen, die bei der Verdünnung von zwei freien Ionen gewonnen werden kann. Analoges gilt, wenn das complexe Salz die Formel K_2CuCl_3 oder K_3CuCl_4 besitzt; auch dann fällt das Correctionsglied wegen der gleichen Wanderungsgeschwindigkeit von Chlor- und Kaliumionen weg. Das ist aber nicht mehr der Fall, wenn complexe Verbindungen mit verschiedenen Wanderungsgeschwindigkeiten der Einzelionen, z. B. die Säure $HCuCl_2$, untersucht werden.

Es stehen also drei Methoden zu Gebote, die Formel complexer Ionen zu ermitteln, von denen je zwei zur Bestimmung ausreichen und durch die dritte controlirt werden. Eine weitere Controle liegt darin, dass die erhaltenen Werthe kleine ganze Zahlen für die Anzahl der Einzelatome im Complexion ergeben müssen. Kleine Abweichungen können hier, wie bei allen Moleculargewichtsbestimmungen, vernachlässigt werden.

Die folgenden Beispiele dienen zur Erläuterung der Anwendung dieser Methoden. Die Einzelheiten der Versuchsanordnung werden an anderer Stelle beschrieben.

Chlorsilber löst sich in Ammoniak, und aus ammoniakreichen, in der Wärme übersättigten Lösungen scheiden sich beim Erkalten Krystalle aus, für die ich die Formel $(AgCl)_2(NH_3)_3$ nachgewiesen hatte. Zugleich hatte ich nachgewiesen, dass die Lösung das Silber in Form von Molecülverbindungen der Ionen enthält. Die Formel der gelösten Silberverbindungen ermittelte ich hauptsächlich durch Bestimmungen der Löslichkeit von Chlorsilber in Ammoniaklösungen verschiedener Concentration. Die Bestimmungen führten zu dem Schluss, dass das Chlorsilber in Form derselben Verbindung, $(AgCl)_2(NH_3)_3$, in der Lösung vorhanden ist, welche sich aus der gesättigten Lösung ausscheidet. Wenn das der Fall ist, müssen die Kationen der Verbindung die Formel $Ag_2(NH_3)_3$

besitzen. Nach den obigen Ausführungen muss für die gesättigte Lösung die Beziehung gelten:

$$(D\alpha)^2 + 1 \cdot (\text{NH}_3)^3 = k; (D:\alpha):(\text{NH}_3) = \sqrt[3]{k},$$

wo $(D\alpha)$ die Concentration der Kationen des Silbersalzes bedeutet, k eine Constante. Gleiches musste dann auch für die Lösungen von Bromsilber in Ammoniak gelten, die nur durch die Anionen und den Werth der Constanten sich unterscheiden. Sowohl die älteren Untersuchungen als die neueren, die ich in Gemeinschaft mit Herrn Dr. R. Fittig anstellte, bestätigen dieses Ergebniss für verdünnte Lösungen, wie die folgenden Zahlen zeigen:

Löslichkeit von Chlorsilber in Ammoniak bei 25°.

1000 g Wasser enthalten Gr.-Molecüle		Wirksame Menge des Ammoniaks A	Dissociation des Doppelsalzes α	$\frac{D \cdot \alpha}{A}$
Ammoniak	Chlorsilber D			
0,0942	0,004592	0,0947	0,95	0,0461
0,10065	0,005164	0,1011	0,95	0,0496
0,1033	0,005343	0,104	0,95	0,0489
0,2084	0,01137	0,211	0,936	0,0502
0,2947	0,01588	0,299	0,926	0,0492
0,4881	0,02588	0,500	0,91	0,0471
0,9663	0,06117	1,015	0,874	0,0526
1,9004	0,13616	2,091	0,843	0,0549
2,8393	0,2254	3,265	0,815	0,0561
3,7574	0,3438	4,437	0,795	0,0616
4,6918	0,4680	5,818	0,78	0,0627

Bis zu Ammoniakconcentrationen über 0,5-normal bleibt das Verhältniss der Concentration der Ionen des Doppelsalzes zu der wirksamen Menge des Ammoniaks praktisch constant¹⁾.

¹⁾ Als wirksame Menge eines flüchtigen Stoffes wird man aus thermodynamischen Gründen genauer seinen Dampfdruck als seine Concentration in die Rechnung einsetzen. Die Concentration ist, so lange das Henry'sche Gesetz für den Stoff gilt, dem Dampfdruck proportional. Bei dem Ammoniak ist das aber, wie sich u. A. aus Versuchen von Gaus (Ueber den Einfluss von Neutralsalzen auf die Tension des Ammoniaks aus wässriger Lösung. Zeitschr. f. anorg. Chem. 25, 236—264, 1900) ergibt, nicht der Fall. Man kann nach diesen Versuchen die active Menge des Ammoniaks angenähert dem $(1 + 0,05n)$ -fachen der Concentration setzen,

Es ist also, wenn $\text{Ag}_m(\text{NH}_3)_n\text{Cl}_m$ die Formel des gelösten Chlorsilberammoniaks ist, $m + 1 = n$, so lange die Ammoniakconcentration nicht höher als 1-normal ist. Dagegen bleibt es unentschieden, ob die Formel $\text{Ag}(\text{NH}_3)_2\text{Cl}$ oder $\text{Ag}_2(\text{NH}_3)_3\text{Cl}_2$ oder $\text{Ag}_3(\text{NH}_3)_4\text{Cl}_3$ etc. ist.

Das lässt sich aber leicht durch die Untersuchung von Concentrationsketten nach dem Schema: Silber | wenig Chlorsilber in Ammoniak | viel Chlorsilber in Ammoniak | Silber, entscheiden, in welchen die Ammoniakconcentration an beiden Elektroden die gleiche ist. Der Werth von m ergibt sich aus den in der folgenden Tabelle zusammengestellten elektromotorischen Kräften der Ketten nach der Formel (3) (vergl. S. 163)

$$m = \frac{0,058}{E} \log \frac{(D.\alpha)}{(D.\alpha)_1}$$

Concentrationsketten bei gleichem Ammoniak- und verschiedenem Chlorsilbergehalt.

Temperatur ° C.	Concentration des NH_3 normal	Concentration des Chlorsilbers		E Volt	m
		I normal	II normal		
19,5	1	0,0379	0,00379	0,06007	1,03
19,5	1	0,0379	0,000379	0,1120	0,97
18	0,1	0,0014	0,00014	0,0434	0,75
17	0,1	0,00372	0,000372	0,0557	0,96
17	0,1	0,00372	0,0000372	0,1058	0,91
17	0,1	0,000372	0,0000372	0,0505	0,87
18	0,1	0,0095	0,00095	0,0569	0,98
18	0,1	0,0095	0,000095	0,1079	0,93
18	0,1	0,00095	0,000095	0,0515	0,89

Es sind an den Werthen keine Correctionen angebracht für die Verschiedenheit der Dissociation des gelösten Chlorsilber-

wenn n die Concentration in Normalitäten bedeutet. Ein Theil des Ammoniaks wird durch das gelöste Chlorsilber gebunden. Ist A die Gesamtmenge des Ammoniaks und n die Anzahl der Ammoniakmolecüle, die von einem Molecül Chlorsilber gebunden sind, so wäre eigentlich das Verhältniss $(A - nD) : D\alpha$ statt $A : D\alpha$ zu berechnen. Das würde aber nur den Werth des Verhältnisses beeinflussen, und nur sehr unerheblichen Einfluss dahin äussern, ob das Verhältniss praktisch constant ist, oder nicht.

ammoniaks für die Aenderung der Concentration des Ammoniaks dadurch, dass das Chlorsilber Ammoniakmolecüle addirt, und für die elektromotorische Kraft an der Grenze der Flüssigkeiten. Die Correctionen wären klein und schwer zu bestimmen. Am meisten ins Gewicht fällt die Flüssigkeitskette, weil die Lösungen relativ viel Hydroxylionen enthalten, die schneller wandern als die übrigen Ionen. Eine normale Ammoniaklösung ist zu 0,4, eine 0,1 normale zu 1,4 Proc. dissociert; sie enthalten also 0,004 bezw. 0,0014 OH-Ionen. Ihre Menge ist also gegenüber den Chlorionen beträchtlich. Auf ihren Einfluss ist es zurückzuführen, dass die elektromotorische Kraft etwas zu klein ist, dass man für m namentlich in Lösungen, die sehr wenig Chlorsilber enthalten, Werthe unter 1 erhält. Im Allgemeinen liegen aber die Zahlen so nahe an 1 — der Durchschnittswerth ist 0,92 —, dass man sicher ist, dass in den Lösungen von Chlorsilber in Ammoniak nur Molecüle mit je einem Atom Silber vorhanden sind. Da $m = 1$ und $m + 1 = n = 2$ ist, so muss die Formel der complexen Ionen in den Lösungen mit weniger als 1 Grammmolecül Ammoniak im Liter $\text{Ag}(\text{NH}_3)_2$, die Formel des complexen Salzes $\text{Ag}(\text{NH}_3)_2\text{Cl}$ sein.

Dieser Schluss wird bestätigt durch die Messung der Ketten, die an den Silberelektroden Lösungen enthalten, die an Chlorsilber gleich, an Ammoniak verschieden concentrirt sind. In der folgenden Tabelle sind die Messungen an solchen Concentrationsketten und die daraus nach der Formel (4) (S. 165):

$$\frac{n}{m} = \frac{E}{0,058 \log \frac{(\text{NH}_3)_1}{(\text{NH}_3)}}$$

berechneten Werthe zusammengestellt. Für die Berechnung der activen Menge des Ammoniaks wurden von den angewandten Mengen diejenigen in Abzug gebracht, die als complexes Molecül gebunden sind, also für jedes Atom Silber zwei Molecüle¹⁾.

¹⁾ Man könnte das als eine petitio principii ansehen. Es würden aber die Resultate äusserst wenig beeinflusst werden, wenn man für 1 Ag ein oder drei oder gar kein Molecül Ammoniak in Abzug brächte. Uebrigens ergeben die Versuche von Konowalow (Ueber die Löslichkeit des Ammoniaks in wässrigen Lösungen, Chem. Centralbl. 1898, II, 659), dass hauptsächlich jedes Atom gelösten Silbers zwei Molecüle Ammoniak bindet.

Ausserdem wurde berücksichtigt, dass, wie oben S. 169 ausgeführt wurde, die active Masse schneller zunimmt als die Concentration.

Temperatur	Concentration des Chlorsilbers	Concentration des Ammoniaks		Wirksame Menge des Ammoniaks		<i>E</i> Volt	$\frac{n}{m}$
		I	II				
		normal		I	II		
18	0,0034	1	0,1	1,0432	0,0937	0,1213	2,00
17	0,025	2	1	2,145	0,998	0,0356	1,85
19	0,05	5	2	6,15	2,09	0,0493	1,81
16	0,05	7,5	5	10,2	6,15	0,0306	2,40

Man erkennt, dass in 0,1 bis 1-normalen Lösungen das Verhältniss der NH_3 -Moleküle im Complex zu den Silberatomen 2:1 ist, und dass, da die Complexe nur ein Silberatom enthalten, ihre Formel $\text{Ag}(\text{NH}_3)_2\text{Cl}$ sein muss. Es wird also dadurch das Resultat der beiden anderen Methoden bestätigt. Bei höheren Concentrationen des Ammoniaks wird das Verhältniss $n:m$ grösser als zwei. Es sind dann, was auch die Löslichkeitsversuche wahrscheinlich machen, wohl Moleküle der Formel $\text{Ag}(\text{NH}_3)_3\text{Cl}$ neben denen der Formel $\text{Ag}(\text{NH}_3)_2\text{Cl}$ vorhanden. Dagegen besteht kein Anzeichen, dass das im festen Zustande existirende Salz $\text{Ag}_2(\text{NH}_3)_3\text{Cl}_2$, in welchem also $n:m = 1,5$ sein müsste, auch in der Lösung vorhanden ist.

Wenn Chlorsilber in Ammoniak Ionen der Formel $\text{Ag}(\text{NH}_3)_2$ bildet, so müssen auch andere Silbersalze bei der Lösung in Ammoniak dieselben Complexionen bilden. Für die Auflösungen von Silbernitrat in Ammoniak wird das durch die Messungen von Konowalow (l. c.) wahrscheinlich gemacht, welcher fand, dass der Ammoniakdruck von wässrigem Ammoniak durch Auflösung von Silbernitrat so erniedrigt wird, als wenn für jedes Atom Silber zwei Moleküle Ammoniak aus der Lösung verschwinden würden. Die Zahlen von Gaus (l. c.), nach denen bei der Auflösung von 0,0491 g-Mol. Chlorsilber in 1 *n*-Ammoniak der Ammoniakdampfdruck um 10 Proc. erniedrigt wird, bestätigen das für Chlorsilber gefundene Ergebniss. Dagegen führen die Beobachtungen von Dawson und Mac Crae¹⁾ über die Vertheilung

¹⁾ Die Elektroaffinität der Metalle. Zeitschr. f. anorg. Chem. 26, 94—103, 1901.

des Ammoniaks zwischen ammoniakalischer Chlorsilberlösung und Chloroform zu der Annahme, dass die Formel des gelösten Chlorsilbers $(\text{AgCl})_2(\text{NH}_3)_3$ ist. Es können die Bestimmungen über die Dampfdrucke oder Vertheilungsverhältnisse des Ammoniaks deshalb zu keinem einwandfreien Ergebniss über die Anzahl der gebundenen Ammoniakmolecüle führen, weil und so lange der Einfluss, den ein chemisch nicht einwirkender Körper auf die Ammoniakdampfspannung ausübt, nicht genügend bestimmt werden kann. Noch weniger können diese Bestimmungen dazu dienen, irgend welchen Aufschluss über die Festigkeit zu geben, mit der das Ammoniak in den complexen Molecülen gebunden ist.

Dass die Lösungen von Silbernitrat in Ammoniak Molecüle $\text{Ag}(\text{NH}_3)_2\text{NO}_3$, resp. Ionen $\text{Ag}(\text{NH}_3)_2$ enthalten, ergibt sich aus folgenden Bestimmungen:

Concentrationsketten mit gleichem Ammoniak- und verschiedenem Silbernitratgehalt.

Temperatur	Concentration des Ammoniaks normal	Concentration des Silbernitrats		E	m
		I	II		
		normal			
17	0,1	0,00372	0,000372	0,0559	0,96
17	0,1	0,00372	0,0000372	0,1055	0.91
17	0,1	0,000372	0,0000372	0,0507	0.88

Concentrationsketten mit gleichem Silbernitrat- und verschiedenem Ammoniakgehalt.

Temperatur	Concentration des Silbernitrats normal	Concentration des Ammoniaks		Wirksame Menge		E	$\frac{n}{m}$
		I	II	I	II		
17	0,02	5	2	6,20	2,16	0,0468	1,77
16	0,05	5	7,5	6,15	10,2	0,0245	2,00

Das gelöste Silbernitratammoniak hat also bis in hohe Ammoniakconcentrationen die Formel $\text{Ag}(\text{NH}_3)_2\text{NO}_3$.

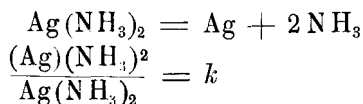
Dass die Werthe $n:m$ bei Silbernitrat von den bei Chlorsilber gefundenen etwas abweichen, liegt daran, dass der Einfluss

der Flüssigkeitskette bei dem Nitrat ein anderer sein muss als bei dem Chlorid.

Alle Silbersalze müssen in Ammoniak die gleichen Ionen $\text{Ag}(\text{NH}_3)_2$ geben. Wenn man aus der Zusammensetzung eines festen complexen Salzes auf die Zusammensetzung des in der Lösung vorhandenen Salzes und umgekehrt schliessen dürfte, müssten alle Ammoniakverbindungen von Silbersalzen die Formel $\text{Ag}(\text{NH}_3)_2\text{X}$ haben. Die Zusammenstellung von Reychler¹⁾ zeigt, dass die folgenden festen Salze auf ein Silberatom zwei Moleküle Ammoniak enthalten: $\text{AgCl} \cdot 2\text{NH}_3(?)$, $\text{AgJ} \cdot 2\text{NH}_3$, $\text{AgClO}_3 \cdot 2\text{NH}_3$, $\text{AgBrO}_3 \cdot 2\text{NH}_3$, $\text{Ag}_2\text{SO}_4 \cdot 4\text{NH}_3$, $\text{Ag}_2\text{S}_2\text{O}_7 \cdot 4\text{NH}_3$, $\text{Ag}_2\text{SeO}_4 \cdot 4\text{NH}_3$, $\text{Ag}_2\text{CrO}_4 \cdot 4\text{NH}_3$, $\text{AgNO}_3 \cdot 2\text{NH}_3$, $\text{AgNO}_2 \cdot 2\text{NH}_3$, $\text{Ag}_4\text{As}_2\text{O}_5 \cdot 8\text{NH}_3$, $\text{AgCH}_3\text{CO}_2 \cdot 2\text{NH}_3$, $\text{Ag}_2\text{C}_2\text{O}_4 \cdot 4\text{NH}_3$, $\text{Ag}_3\text{C}_6\text{H}_5\text{O}_7 \cdot 6\text{NH}_3$ (Citrat), $\text{AgC}_6\text{H}_5 \cdot \text{CO}_2 \cdot 2\text{NH}_3$ und $\text{AgC}_6\text{H}_2(\text{NO}_2)_3\text{O} \cdot 2\text{NH}_3$. Das ist die überwiegende Menge der Ammoniakverbindungen und entspricht der Thatsache, dass auch in Lösungen Ionen $\text{Ag}(\text{NH}_3)_2$ existiren. Es ist aber zu beachten, dass auch viele feste Salze bekannt sind, welche einen anderen Ammoniakgehalt besitzen. Das sind nach Reychler: $2\text{AgCl} \cdot 3\text{NH}_3$, $2\text{AgJ} \cdot \text{NH}_3$, $\text{AgNO}_3 \cdot \text{NH}_3$, $\text{AgNO}_3 \cdot 3\text{NH}_3$, $\text{AgNO}_2 \cdot \text{NH}_3$, $\text{AgNO}_2 \cdot 3\text{NH}_3$, $\text{Ag}_3\text{PO}_4 \cdot 4\text{NH}_3(?)$, $\text{AgCN} \cdot \text{NH}_3$, $\text{Ag}_3\text{C}_3\text{N}_3\text{O}_3 \cdot \text{NH}_3$ und $\text{AgCNS} \cdot \text{NH}_3$. Von diesen existiren die Salze mit 3NH_3 auf 1 Ag wahrscheinlich auch in Lösungen, die sehr ammoniakreich sind. Für die Existenz von Ionen $\text{Ag} \cdot \text{NH}_3$ oder $\text{Ag}_2(\text{NH}_3)_3$, die einem Theil dieser Salze zu Grunde liegen müssten, wenn sie in Lösungen existiren würden, fehlt aber noch jeder Anhalt. Man darf daher nicht ohne Weiteres annehmen, dass jedes im festen Zustande vorhandene complexe Salz auch in der Lösung unverändert existiren kann.

Auch die Festigkeit, mit der die Bestandtheile der Complexionen an einander gebunden sind, kann man durch Messung der elektromotorischen Kraft bestimmen.

In der Dissociationsgleichung:



¹⁾ Les dérivés ammoniacaux des sels d'Argent. Brüssel 1884. Joannis und Crozier (Compt. rend. 118, 1149, 1894) stellten ausserdem noch die Salze dar: $\text{AgBr} \cdot 3\text{NH}_3$, $2\text{AgBr} \cdot 3\text{NH}_3$, $\text{AgBr} \cdot \text{NH}_3$ und $\text{AgJ} \cdot \text{NH}_3$.

ist k die Dissociationsconstante des Complexions. Je grösser sie ist, um so geringer ist der Zusammenhalt der Bestandtheile des Complexions. Kennt man für eine Lösung die Concentration der Silberionen, des freien Ammoniaks und der Complexionen, so ist k bestimmt und damit der reciproke Werth der Beständigkeit des Complexions. (NH_3) und $\text{Ag}(\text{NH}_3)_2$ lassen sich leicht analytisch ermitteln, die Concentration der Silberionen elektromotorisch durch Messung der elektromotorischen Kraft von Silber in einer Lösung des Complexions gegen Silber in Silbernitrat. Eine Messung, in der die Complexlösung 0,025-normal für Silber und 1-normal für Ammoniak, die AgNO_3 -Lösung 0,0093-normal war, ergab die elektromotorische Kraft 0,3879 Volt, woraus sich die Concentration der freien Silberionen in der Complexsalzlösung nach der Gleichung:

$$\log(\text{Ag}) = \log(0,0093 \cdot 0,94) - \frac{0,3879}{0,058} = 0,2536 - 9$$

$$(\text{Ag}) = 1,793 \cdot 10^{-9}$$

ergab. Da die wirksame Menge des Ammoniaks 1-normal, die Concentration der Complexionen 0,025-normal und ihre elektrolitische Dissociation 0,95 ist, so ist

$$k = \frac{(\text{Ag})(\text{NH}_3)^2}{\text{Ag}(\text{NH}_3)_2} = 7,9 \cdot 10^{-8}.$$

Man kann k auch aus der Löslichkeit berechnen, wenn die Löslichkeit des einfachen Schwermetallsalzes bekannt ist. Es ist wenn Chlorsilber Bodenkörper ist, das Product aus den Concentrationen der Chlorionen und der Silberionen constant und besitzt nach Goodwin¹⁾ den Werth

$$(\text{Ag}) \cdot (\text{Cl}) = (1,25 \cdot 10^{-5})^2$$

$$(\text{Ag}) = \frac{1,25^2 \cdot 10^{-10}}{(\text{Cl})}.$$

Setzt man diesen Werth in die obige Gleichung ein und berücksichtigt, dass in der ammoniakalischen Lösung von Chlorsilber ebenso viel Complexionen wie Chlorionen vorhanden sind, so ist

$$k = \frac{1,25^2 \cdot 10^{-10} \cdot (\text{NH}_3)^2}{[\text{Ag}(\text{NH}_3)_2]^2}.$$

Greifen wir z. B. die Lösung heraus, die für Ammoniak

¹⁾ Studien an Volta'schen Ketten. Zeitschr. f. physik. Chem. 23, 577 (1894).

0,488-normal ist (S. 169). Nach Abzug des im Complexsalz gebundenen Silbers und der Aenderung der wirksamen Menge bei steigender Concentration erhalten wir hier: $(\text{NH}_3) = 0,44824$. $\text{Ag}(\text{NH}_3)_2$ ist $0,02588 \cdot 0,91$. Daraus ergibt sich

$$k = \frac{1,25^2 \cdot 10^{-10} \cdot 0,44824^2}{0,02588^2 \cdot 0,91^2} = 5,66 \cdot 10^{-8}.$$

Der Werth ist dem oben auf ganz anderem Wege erhaltenen wenigstens der Grössenordnung nach gleich und zeigt genügende Uebereinstimmung, wenn man berücksichtigt, dass die Löslichkeit des Chlorsilbers doch nur ungenau bekannt ist und dass bei der Berechnung aus der elektromotorischen Kraft die Spannung an der Berührungsstelle der Flüssigkeiten vernachlässigt wurde.

Dieselben Methoden wurden von Herrn Dr. Storbeck auch zur Untersuchung der complexen Ionen benutzt, welche Cuproverbindungen in Ammoniak bilden. Ein wesentlicher Unterschied zeigte sich nur insofern, als sich ergab, dass sich Kupferchlorür bei Behandlung mit Ammoniak nicht unzersetzt löste, sondern zunächst in Kupferoxydulhydrat verwandelt wurde. Dieses löst sich wenig in dem Ammoniak; ausserdem löst sich überschüssiges Kupferchlorür in der entstandenen Chlorammoniumlösung, so dass die Lösung zwei Arten complexer Ionen enthält, die Cuproammoniakionen und die Cuprochloridchlorionen, wenn ein Ueberschuss von Ammoniak vorhanden ist. Um einfache Verhältnisse zu schaffen, wurde nur die Lösung von Cuprohydroxyd in überschüssigem Ammoniak bei völligem Ausschluss von Sauerstoff untersucht.

Die Versuche mit gleichem Ammoniakgehalt, aber verschiedenem Kupfergehalt in beiden Flüssigkeiten, die mit Kupferelektroden untersucht wurden, ergaben, dass die complexen Ionen nur ein Cuproatom enthalten. Die Zahl ergibt sich auch hier aus der Gleichung (3):

$$m = \frac{0,058}{E} \log \frac{(D \cdot \alpha)}{(D \cdot \alpha)_1},$$

wo E die elektromotorische Kraft der Concentrationskette, $(D \cdot \alpha)$ und $(D \cdot \alpha)_1$ die Gehalte der beiden Lösungen an complexen Ionen sind. Man kann in den sehr verdünnten Lösungen ohne merklichen Fehler die Gesamtconcentration für die Ionenconcentration einsetzen.

Temperatur	Concentration des NH_3	Concentration des Kupfers		E	m
		I	II		
20,5	0,5	0,00175	0,0006	0,0298	0,905
20,5	0,5	0,00175	0,0002	0,0540	0,99
18	0,37	0,001974	0,000658	0,0276	1,00
18	0,37	0,001974	0,000219	0,0518	0,94

Die folgende Tabelle enthält die Messungen der Ketten, in denen die Concentration des Kupfers an beiden Elektroden die gleiche, die des Ammoniaks aber eine verschiedene war. Hier ergibt sich das Verhältniss $n:m$ der Ammoniakmoleküle zu den Kupferatomen in dem complexen Ion aus der Gleichung (4) (S. 165):

$$\frac{n}{m} = \frac{E}{0,058 \log \frac{(\text{NH}_3)_1}{(\text{NH}_3)}}$$

Temperatur	Concentration des Kupfers normal	Concentration des Ammoniaks		Wirksame Menge des Ammoniaks		E Volt	$\frac{n}{m}$
		I	II	I	II		
		normal		I	II		
20,5	0,0006	1,5	0,5	1,61	0,52	0,0534	1,89
18	0,00099	1,41	0,37	1,51	0,377	0,0746	2,13
18	0,00099	1,76	0,37	1,915	0,377	0,0906	2,21

Es zeigt sich also, dass die Formel der complexen Ionen $\text{Cu}(\text{NH}_3)_2$, die der complexen Base $\text{Cu}(\text{NH}_3)_2\text{OH}$ ist. Dass etwa das Cuprohydroxyd von dem Ammoniak unter Bildung eines Ammonsalzes des Cuprohydroxyds gelöst wird, ist deshalb ausgeschlossen, weil dann das Cuprohydroxyd sich noch mehr in Kalilauge lösen müsste. Dass das nicht der Fall ist, ergibt sich ja schon aus der vollständigen Abscheidung des Kupferoxyduls durch Dextrose aus alkalischer Lösung von Cuprisalzen. Die Formel $\text{Cu}(\text{NH}_3)_2\text{OH}$ steht auch mit den Resultaten von Löslichkeitsversuchen im Einklang, über die Herr Dr. Storbeck an anderer Stelle berichten wird.

Auch für die complexen Cuproammoniakionen lässt sich die Beständigkeit auf elektrometrischem Wege messen. Eine Kette, gebildet aus Kupfer | Lösung von 0,00039 g-Mol. CuOH in 1,5-

normalem Ammoniak, ergab gegen eine $\frac{1}{10}$ -Calomelelektrode die elektromotorische Kraft 0,615, wobei das Kupfer negativer Pol war. Vernachlässigen wir zunächst die Flüssigkeitskette an der Berührungsstelle der Calomelelektrode mit der ammoniakalischen Kupferlösung und berücksichtigen, dass, wie Untersuchungen von Storbeck und dem Verfasser ergeben, die Spannung einer für Cuproionen 0,00037-normalen Lösung gegen die $\frac{1}{10}$ -Calomелеlektrode 0,086 Volt ist, wobei die Kupferelektrode sich negativ lädt, so ergibt sich die Concentration (Cu) der freien Cuproionen aus der Gleichung $0,615 - 0,086 = 0,058 \log \frac{0,00037}{(\text{Cu})}$

$$(\text{Cu}) = 2,80 \cdot 10^{-13}.$$

Die wirksame Menge des Ammoniaks ist 1,6, die Concentration der complexen Ionen 0,00039. Mithin ist die Dissociations-constante:

$$k = \frac{(\text{Cu}) \cdot (\text{NH}_3)^2}{(\text{Cu})(\text{NH}_3)_2} = 1,84 \cdot 10^{-9}.$$

Die Constante der Dissociation der Cuproammoniakionen ist etwa ein Vierzigstel der Constante der Silberammoniakionen. Die Beständigkeit der complexen Cuproionen ist also grösser als die der complexen Silberionen. Nach der Stellung des Cuprokupfers in der Spannungsreihe ist es unedler als das Silber. Man hätte danach erwarten sollen, dass das Cuprokupfer minder beständige Complexe giebt als das Silber. Uebrigens tritt die gleiche Anomalie auch bezüglich der Löslichkeit der Oxyde hervor.

Auch zur Untersuchung der complexen Salze, die Cuprochlorid mit Chloriden bildet, hat Herr Dr. Storbeck die hier beschriebenen Methoden benutzt. Die elektromotorische Kraft von Concentrationsketten mit Kupferelektroden bei gleichem Gehalt beider Lösungen an dem complexen Kupfersalz und verschiedenem Gehalt an Chlor ergab hier die sichersten Werthe. Das Verhältniss der Anzahl der Chloratome n zur Anzahl der Cuproatome m in den complexen Ionen ergibt sich nach Formel (4) S. 165 aus der Gleichung:

$$\frac{n}{m} = \frac{E}{0,058 \log (\text{Cl})_1 : (\text{Cl})}.$$

Zur Berechnung der Concentration der Chlorionen in den

beiden Lösungen musste von dem zur Darstellung der Lösungen benutzten Chlorkalium der Theil abgezogen werden, der zur Bildung des complexen Salzes $\text{Cu}_m \text{Cl}_n \text{K}_{n-m}$ verwandt wird. Man musste also für jedes in Form des complexen Salzes vorhandene Cuproatom von dem angewandten Chlorkalium $\frac{n-m}{m}$ Moleküle in Abzug bringen, eine Grösse, die von vornherein unbekannt ist. Es wurden der Einfachheit der Rechnung wegen zwei Reihen von Werthen des Verhältnisses berechnet, unter der Annahme, dass $\frac{n-m}{m} = 1$ oder $= 2$ ist. Ausserdem wurde die elektrolitische Dissociation des Chlorkaliums berücksichtigt. Die so corrigirten Werthe des Verhältnisses der Chlorionen sind als $(\text{Cl})'_1 : (\text{Cl})'$ und $(\text{Cl})''_1 : (\text{Cl})''$ aufgeführt. Man erkennt, dass der schliessliche Werth von $n:m$, der aus der elektromotorischen Kraft berechnet wird, durch die willkürliche Annahme für die Concentrationsberechnung nicht wesentlich beeinflusst wird. Unter $(n:m)'$ und $(n:m)$ sind die unter beiden Annahmen aus der elektromotorischen Kraft sich ergebenden Atomverhältnisse aufgeführt:

Kupfer- gehalt g-Atome	Chlorkalium- gehalt g-Moleküle		Chlorionen-Verhältniss		E Volt	(n : m)'	(n : m)
	(KCl) ₁	(KCl)	(Cl)' ₁ : (Cl)'	(Cl)'' ₁ : (Cl)''			
0,00008	0,2	0,05	3,73	3,73	0,0680	2,05	2,05
0,0002	0,22	0,1	2,1	2,1	0,0374	2,00	2,00
0,00014	0,3	0,1	2,8	2,8	0,0524	2,01	2,01
0,00007	0,4	0,1	3,69	3,69	0,0734	2,23	2,23
0,05	2,0	0,642	3,0	3,2	0,0805	2,90	2,75
0,0425	2,0	0,66	2,87	3,02	0,0803	3,03	2,89

Wie die Werthe der letzten Spalten ergeben, ist $n : m$ in den verdünnteren Chlorkaliumlösungen zweifellos 2, in den concentrirteren 3. Für jene ergibt sich die Formel des complexen Salzes $\text{K}_m \text{Cu}_m \text{Cl}_{2m}$, für diese $\text{K}_{2m} \text{Cu}_m \text{Cl}_{3m}$.

Die Zahl der neben dem Kupferchlorür im Complexion vorhandenen Chlorionen ist für verdünntere Lösungen zweifellos $= 1$, wie die folgende Tabelle der Löslichkeiten von Kupferchlorür in Chlorkalium und die Formel (2) (S. 161) ergibt:

Temperatur	Chlorkalium	Kupferchlorür	Chlorkalium : Kupferchlorür
18,3	0,05	0,002411	19,74
16	0,1	0,004702	20,27
16	0,2	0,009458	20,15

Es ist die Concentration des gelösten Complexsalzes der ersten Potenz der Concentration des Chlorkaliums proportional. Es ist also in verdünnteren Chlorkaliumlösungen die Formel der Complexionen CuCl_2 und des Complexsalzes KCuCl_2 . Für die concentrirteren Lösungen von Chlorkalium giebt die Löslichkeit des Kupferchlorürs keine entsprechende Aufklärung. Das liegt daran, dass, wie die oben discutirten Concentrationsketten zeigen, in ihnen sicher das Kupfer in Form mehrwerthiger Anionen vorhanden ist. Es ist die Formel des complexen Salzes in den concentrirteren Lösungen $\text{K}_{2m}\text{Cu}_m\text{Cl}_{3m}$, also entweder K_2CuCl_3 oder $\text{K}_4\text{Cu}_2\text{Cl}_6$ oder $\text{K}_6\text{Cu}_3\text{Cl}_9$ etc. Ueber die Dissociation mehrwerthiger Salze in concentrirteren Lösungen sind wir aber sehr wenig unterrichtet, so dass wir aus der Gesamtconcentration keinen Schluss auf die Concentration der mehrwerthigen Ionen ziehen können. Jedenfalls ergibt aber die Messung der Concentrationsketten, dass die complexen Ionen in den concentrirteren Chlorkaliumlösungen nicht die von Abel angenommene Formel Cu_2Cl_4 haben können.

Für die concentrirteren Lösungen erhält man aus der elektromotorischen Kraft der Ketten mit gleichem Chlorkaliumgehalt und verschiedenem Kupfergehalt Werthe, die wegen der ungenauen Kenntniss der elektrolytischen Dissociation mehrwerthiger Salze nicht ganz sicher sind, aber die Zahl 1 für die Kupferatome im Complexion sehr wahrscheinlich machen. Für die verdünnteren Lösungen wird der aus den anderen Concentrationsketten und den Löslichkeitsversuchen gezogene Schluss bestätigt, dass die complexen Ionen ein Atom Kupfer enthalten. Die Zahl der Kupferatome ergibt sich hier aus der Gleichung (3) (S. 163):

$$m = \frac{0,058}{E} \log \frac{(\text{Cu}_m\text{Cl}_n)}{(\text{Cu}_m\text{Cl}_n)_1},$$

Concentration des Chlorkaliums	Concentration des complexen Salzes		E	m
	I	II		
0,1	0,004	0,001	0,0336	0,97

Die Beständigkeit des complexen Ions CuCl_2 ergibt sich aus der Messung der elektromotorischen Kraft einer zu drei Viertel mit Kupferchlorür gesättigten Lösung von 0,1-normalem Chlorkalium gegen eine 0,1-Calomelektrode. Sie beträgt 0,086, wobei das Kupfer negativer Pol ist. Daraus ergibt sich analog wie oben (S. 178) die Concentration der freien Cuproionen in dieser Lösung zu 0,000027. Die Concentration der complexen Ionen CuCl_2 in dieser Lösung ist 0,0030, die der freien Chlorionen 0,079. Somit ist die Constante der Dissociation des Complexions in die Einzelionen:

$$\text{Cu}\overline{\text{Cl}}_2 = \text{Cu}^+ + 2\overline{\text{Cl}}$$

$$k = \frac{(\text{Cu}) \cdot (\text{Cl})^2}{(\text{CuCl}_2)} = \frac{0,000027 \cdot (0,079)^2}{0,003} = 1,91 \cdot 10^{-5}.$$

Eine mit Chlorsilber gesättigte 4-normale Lösung von Chlorkalium enthält nach Hellwig¹⁾ 0,00637 g-Mol. im Liter. Die Concentration der Chlorionen in dieser Lösung ergibt sich daraus, dass das Product $(\text{Ag}) \cdot (\text{Cl})$ für Lösungen, die mit Chlorsilber gesättigt sind, $1,25^2 \cdot 10^{-10}$ sein muss zu $\frac{1,25^2 \cdot 10^{-10}}{(\text{Cl})}$.

Für die in der Lösung wahrscheinlich vorhandenen complexen Ionen AgCl_2 folgt demnach die Constante der Dissociation:

$$\text{Ag}\overline{\text{Cl}}_2 = \text{Ag} + 2\overline{\text{Cl}}$$

$$k = \frac{(\text{Ag})(\text{Cl})^2}{(\text{AgCl}_2)} = \frac{(1,25)^2 \cdot 10^{-10} \cdot \text{Cl}}{(\text{AgCl}_2)}.$$

Da der Dissociationsgrad des Chlorkaliums und des Salzes KAgCl_2 der gleiche sein muss, können wir für die Concentration der Ionen in Zähler und Nenner die der undissociirten Salze setzen und erhalten dann

$$k = \frac{1,25^2 \cdot 10^{-10} \cdot E}{0,00637} = 9,8 \cdot 10^{-8}.$$

Es ist also die Dissociationsconstante des complexen Cupro-

¹⁾ Ueber einige complexe Silbersalze. Zeitschr. f. anorg. Chemie 25, 157 bis 188 (1900).

ions Cu Cl_2 etwa 200 mal so gross wie die des complexen Silberions Ag Cl_2 . Hier ist also entsprechend der allgemeinen Regel das complexe Silberion beständiger als das Complexion des unedleren Metalles. Ebenso ist auch die Löslichkeit des Chlorsilbers der geringeren Elektroaffinität entsprechend kleiner als die des Cuprochlorids.

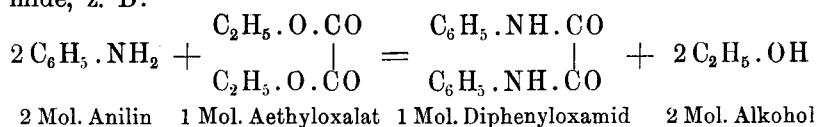
Die an den angeführten Beispielen erläuterte Methode der Bestimmung der Zusammensetzung und Beständigkeit gelöster complexer Verbindungen ist einer weitgehenden Anwendung fähig. Es erscheint nicht ausgeschlossen, dass die gleiche Methode auch zur Ermittlung des Zustandes der Hydrate in den Lösungen führen kann. Wenn ein Hydrat als solches in Alkoholen oder anderen Flüssigkeiten gelöst ist, so würde die Untersuchung nach denselben Methoden erfolgen können, die zur Untersuchung des Chlorsilberammoniaks dienen. Aber auch in wässrigen Lösungen könnte man Concentrationsketten aus Lösungen herstellen, die für das Salz gleich, für das Wasser verschieden concentrirt sind. Das kann geschehen durch Zusatz von Stoffen, die den Dampfdruck der einen Lösung und damit die activen Mengen des Wassers vermindern. Ketten dieser Art habe ich mit Herrn Dr. Sommerfeldt gemessen. Die elektromotorischen Kräfte sind, wie die Theorie voraussehen lässt, sehr klein und zum Theil durch andere Umstände bedingt; doch ist es wohl möglich, dass geeignete Fälle zur Entscheidung der Frage herangezogen werden können, ob Hydrate in Lösungen vorhanden sind und welche Zusammensetzung sie besitzen.

Die Untersuchung complexer Verbindungen nach den angegebenen Methoden wird noch fortgesetzt. Es scheint schon jetzt sich herauszustellen, dass die Zusammensetzung der gelösten complexen Verbindungen einfacher ist als die der festen. Dass gewisse im festen Zustande beständige complexe Verbindungen in der Lösung nicht in nachweisbarer Menge vorhanden sind, während andererseits gewisse gelöste Complexe nicht als Bodenkörper auftreten können, deutet darauf hin, dass bei der Bildung fester complexer Verbindungen der Krystallstructur eine gewisse Bedeutung zukommt und dass nicht ohne Weiteres jeder festen complexen Verbindung die Existenzfähigkeit in Form einfacher, gelöster oder gasförmiger Moleküle zugeschrieben werden muss.

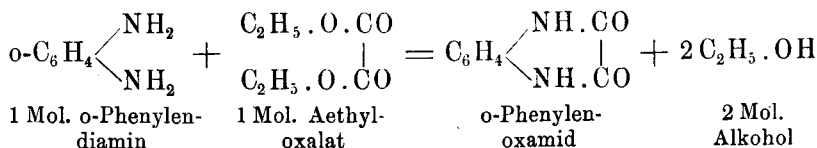
ZUR THEORIE
DER
RINGSCHLIESSUNG.

VON
RICHARD MEYER.

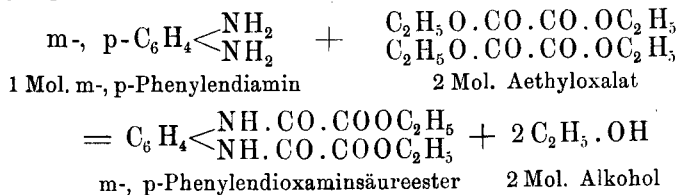
Die Untersuchung, über deren erste und noch sehr bescheidene Anfänge nachstehend berichtet werden soll, ist aus einer früheren, im hiesigen Laboratorium durchgeführten Versuchsreihe über die Einwirkung von Oxalester auf aromatische Amidokörper¹⁾ hervorgegangen. Bei diesen Versuchen hatte sich gezeigt, dass der genannte Ester mit primären Monaminen sehr leicht unter Abspaltung von Alkohol reagiert, und zwar in demselben Sinne wie mit Ammoniak: Es entstehen substituierte Oxamide, z. B:



Wendet man statt eines Monamins ein Diamin der Benzolreihe an, so zeigt sich in sehr charakteristischer Weise der Einfluss der Isomerie. o-Diamine führen zur Bildung von Oxamiden:



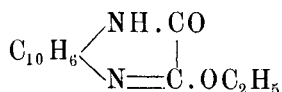
m- und p-Diamine liefern dagegen unter denselben Bedingungen die Ester substituierter Oxaminsäuren:



¹⁾ R. Meyer und A. Seeliger, Ber. d. deutsch. chem. Gesellsch. 29, 2640 (1896); R. Meyer, ibid. 30, 768 (1897); R. Meyer und W. Müller, ibid. 30, 770, 775 (1897).

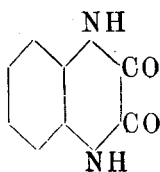
In der Naphtalinreihe wurden analoge Umsetzungen beobachtet, wobei sich die interessante Thatsache ergab, dass die aus 1, 5-Naphtylendiamin entstehende Verbindung grössere Analogie mit der aus 1, 4-Phenylendiamin entstehenden zeigt als das aus 1, 4-Naphtylendiamin resultirende Product.

Die sämmtlichen so entstehenden Körper sind farblos; nur das 1, 8-Naphtylendiamin liefert unter entsprechenden Bedingungen, wie schon 1874 de Aguiar gefunden hat¹⁾, ein tief rothes Condensationsproduct, welchem nach unserer Untersuchung mit Wahrscheinlichkeit die Formel



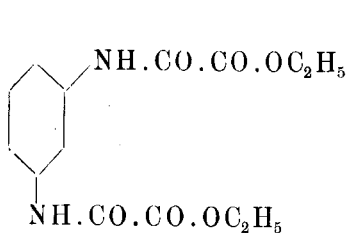
zuzuschreiben ist.

Das besondere Verhalten der o-Diamine erklärt sich leicht aus der benachbarten Stellung der in ihnen enthaltenen Stickstoffatome, welche ebenso wie in zahllosen ähnlichen Fällen zur Ringschliessung disponirt. Im vorliegenden Falle führt die Condensation zur Bildung eines sechsgliedrigen, aus vier Kohlenstoff- und zwei Stickstoffatomen bestehenden Ringes:

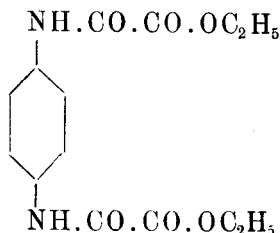


o-Phenyloxamid

Bei den m- und p-Diaminen verhindert die weitere Entfernung der Stickstoffatome einen solchen Ringschluss und es entstehen in Folge dessen Oxaminsäureester:



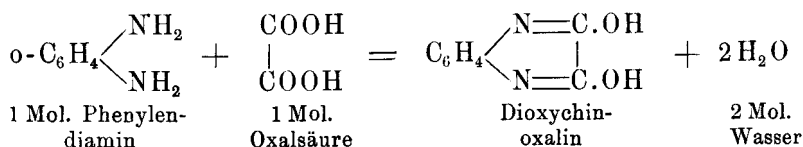
m-Phenylendioxaminsäureester



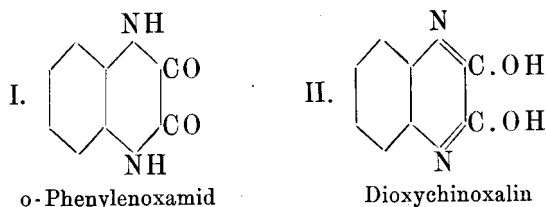
p-Phenylendioxaminsäureester

¹⁾ Ber. d. deutsch. chem. Gesellsch. 7, 306.

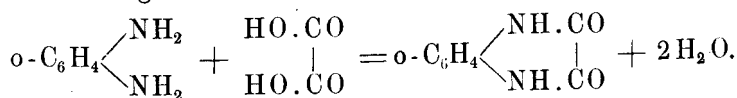
Die o-Oxamide sind sehr hoch schmelzende, in den meisten Lösungsmitteln ausserordentlich schwer lösliche Körper von schwach sauren Eigenschaften und einem nicht sehr starken, aber charakteristischen und ziemlich haftenden, bitteren Geschmack. Bei näherer Untersuchung erwiesen sie sich als identisch mit den kurz vorher von O. Hinsberg durch Condensation von o-Diaminen mit freier Oxalsäure erhaltenen Dioxychinoxalinen¹⁾. Hinsberg schreibt ihnen eine von der vorstehenden etwas abweichende Formulirung zu, wie aus der folgenden Bildungs- gleichung hervorgeht:



Der Unterschied beider Anschauungen wird durch die folgenden aufgelösten Formeln noch deutlicher werden:



Wie man sieht, handelt es sich dabei um die Stellung zweier Wasserstoffatome, welche nach der Formel I an Stickstoff, nach II an Sauerstoff gebunden wären, wodurch dann zugleich ein Bindungswechsel der Kohlen- und Stickstoffatome bedingt wird. Die Bildung aus o-Diaminen und freier Oxalsäure wird durch beide Formeln gleich gut erklärt. Bei der obigen Hinsberg'schen Gleichung ist angenommen, dass die CO-Gruppen der Oxalsäure mit den NH₂-Gruppen des Amins in Reaction treten; die Umsetzung könnte aber auch von den OH-Gruppen der Oxalsäure ausgehen im Sinne der Gleichung:

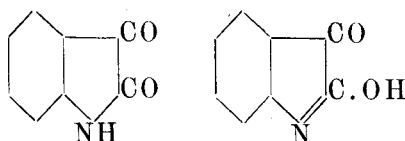


¹⁾ Liebig's Annal. der Chemie 237, 347.

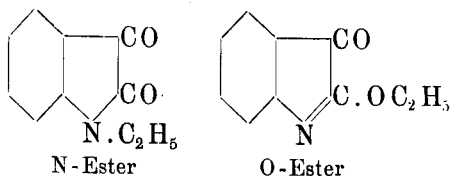
Die Bildung der Körper aus Oxalester, welche unter Abspaltung von Alkohol erfolgt, führt dagegen zunächst nur zu der Formel I; will man trotzdem die Formel II annehmen, so müsste bei der Condensation eine Wanderung zweier Wasserstoffatome vom Stickstoff an den Sauerstoff stattfinden, was bei der Leichtbeweglichkeit dieser Atome nicht ausgeschlossen erscheint.

Fragen dieser Art sind in der organischen Chemie schon oft erörtert, selten aber unzweideutig gelöst worden. In manchen Fällen, die sich im Laufe der letzten Jahre bedeutend gemehrt haben, fand man, dass Körper dieser Art zwei Reihen von Derivaten bilden können, entsprechend den beiden für die Muttersubstanz möglichen Formeln, während die Muttersubstanzen selbst nur in einer der beiden Formen existiren. Eines der ältesten und bekanntesten Beispiele dieser Art ist die Blausäure, welche nur in einer Form bekannt ist, von der sich aber zwei Reihen von Estern ableiten, die Nitrile und die i-Nitrile.

Den Oxychinoxalinen näher steht das durch Oxydation aus dem Indigo entstehende Isatin, für welches man eine der beiden folgenden Formeln annehmen kann:



Aber während das Isatin selbst nur in einer Form existirt, giebt es zwei Reihen von Isatinestern:

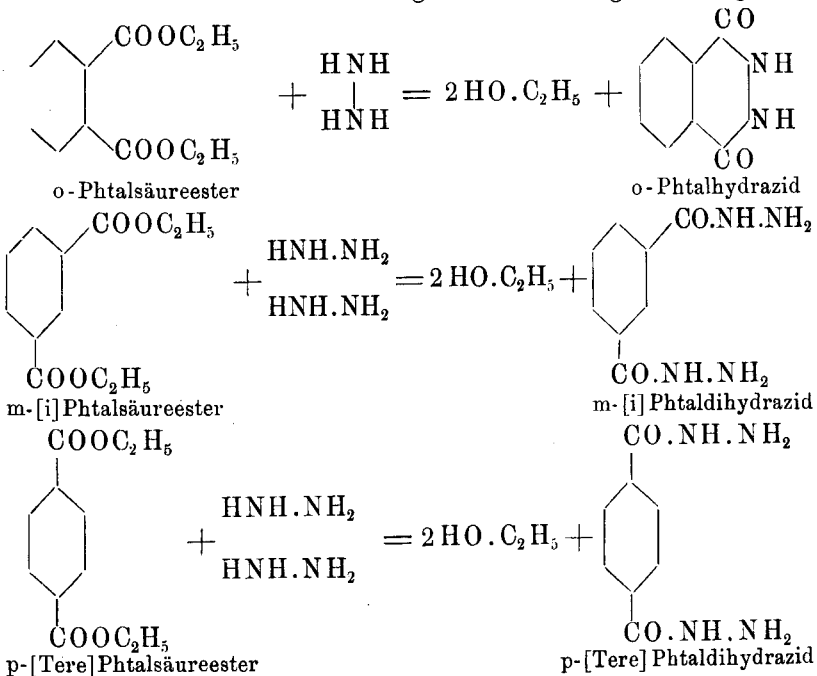


Solche Körper werden als tautomere Verbindungen bezeichnet. Die befriedigendste Erklärung der Tautomerie ist wohl die von Ad. Baeyer gegebene, wonach die beiden für tautomere Körper nach ihren Bildungsweisen oder Umsetzungen möglichen Formeln zwei verschiedenen Gleichgewichtslagen der Atome im Molekül entsprechen. Nur die eine der beiden ist eine stabile, die andere dagegen eine labile Gleichgewichtslage.

Wenn daher bei einer Reaction zunächst die labile Form auftritt, so lagert sie sich gewöhnlich unter Wanderung von einem oder zwei Wasserstoffatomen von selbst in die stabile Form um. Werden dagegen diese leicht beweglichen Wasserstoffatome durch schwerere und daher auch schwerer bewegliche Atomcomplexe ersetzt, so kann dadurch die labile Anordnung der Atome zu einer stabilen werden und daher die Substitutionsproducte der tautomeren Muttersubstanz in beiden Formen existenzfähig sein.

Ob die Condensationsproducte der o-Diamine mit Oxalsäure beziehungsweise Oxalester tautomer sind, oder welche der beiden obigen Formeln ihnen zugeschrieben werden muss, kann vorläufig nicht entschieden werden.

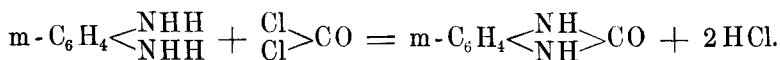
Einen auffallenden Parallelismus zu den vorstehend mitgetheilten Reactionen zeigen die Umsetzungen, welche Th. Curtius und E. Davidis¹⁾ bei der Einwirkung der drei isomeren Phtalsäureester auf Hydrazinhydrat constatiren konnten und welche ohne Weiteres aus den folgenden Gleichungen hervorgehen:



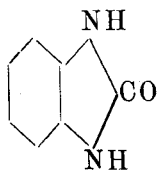
¹⁾ Journ. f. pr. Ch. [2] 54, 66 (1896).

Das o-Phtalhydrazid ist dem o-Phenylenoxamid isomer; man möchte es als sein Reciprokes bezeichnen. Beide Körper zeigen denn auch eine ausserordentlich grosse Aehnlichkeit, die sich besonders in der Unschmelzbarkeit und in der geringen Löslichkeit zu erkennen giebt¹⁾.

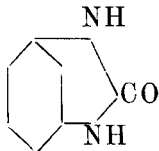
Nach diesen Erfahrungen schien es mir auffallend, dass o-, m- und p-Diamine anscheinend mit gleicher Leichtigkeit in Harnstoffe übergehen. Hier ist die m-Verbindung am längsten bekannt; sie wurde von W. Michler und A. Zimmermann²⁾ durch Sättigen einer Chloroformlösung der Base mit Chlorkohlenoxyd erhalten:



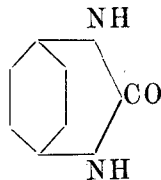
Die isomeren Verbindungen können in analoger Weise dargestellt werden (siehe weiter unten), während für alle drei auch noch andere Bildungsweisen bekannt sind. Die genauere Constitution dieser drei Körper stellt sich durch die folgenden Symbole dar:



o-Phenylenharnstoff

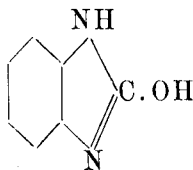


m-Phenylenharnstoff



p-Phenylenharnstoff

Für den o-Körper ist übrigens auch die tautomere Formel:



in Betracht gezogen worden³⁾.

Nach den obigen Formeln enthält der o-Phenylenharnstoff einen fünfgliedrigen, aus drei Kohlenstoffatomen und zwei Stickstoffatomen bestehenden Ring; der m-Körper einen sechsgliedrigen

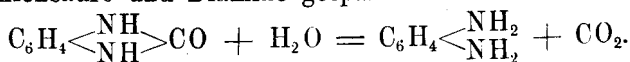
¹⁾ Vergl. Curtius und Försterling, Journ. f. pr. Chem. [2] 51, 371. — ²⁾ Ber. d. deutsch. chem. Gesellsch. 14, 2177 (1881). — ³⁾ T. Sandmeyer, Ber. 19, 2654 (1886).

und der p-Körper einen siebengliedrigen Ring. Die beiden letzteren Systeme zeigen eine sehr unregelmässige Gestalt.

Die Gleichgewichtsverhältnisse homocyklischer, nur aus Kohlenstoffatomen bestehender Ringsysteme sind von Ad. Baeyer auf Grund der van 't Hoff-Le Bel'schen Anschauungen über die räumliche Anordnung der Atome in den Molekülen der Kohlenstoffverbindungen eingehend erörtert worden ¹⁾. Er zeigte, warum fünf- und sechsgliedrigen Kohlenstoffringen von regulärer Form ein besonders hoher Grad von Beständigkeit zukommen müsse, während Ringgebilde von kleinerer oder grösserer Atomzahl in Folge einer bei ihrer Bildung eintretenden intramolekularen Spannung mehr zum Zerfallen geneigt sein müssen und sich dementsprechend weniger leicht bilden können. Während die Stereochemie des Kohlenstoffs seit ihrer vor einem Vierteljahrhundert erfolgten Begründung einen hohen Grad von Ausbildung erfahren hat, haben die übrigen Elemente einer entsprechenden Betrachtungsweise erheblich grössere Schwierigkeiten entgegengestellt. Es ist daher bis jetzt nicht möglich, die Baeyer'sche Spannungstheorie in strenger Weise auch auf heterocyklische Systeme anzuwenden.

Immerhin lässt die Betrachtung der obigen drei Harnstoffformeln erkennen, dass in den Molekülen der isomeren Verbindungen eine sehr verschiedene Spannung herrschen muss, und zwar sicherlich in denen der o-Verbindung eine viel kleinere als in denen der isomeren m- und p-Verbindungen. Der Schluss schien daher gerechtfertigt, dass die beiden letzteren schwerlich dieselbe Beständigkeit besitzen können wie der o-Körper.

Diese Vermuthung hat durch Versuche, welche ich gemeinsam mit Herrn G. v. Lutzau anstellte und über die ich schon auf der Münchener Naturforscher-Versammlung kurz berichtete ²⁾, eine schlagende Bestätigung gefunden. Durch Erhitzen mit rauchender Salzsäure auf 160° oder mit alkoholischem Ammoniak auf 120° werden die m- und p-Amide mit grösster Leichtigkeit in Kohlensäure und Diamine gespalten:

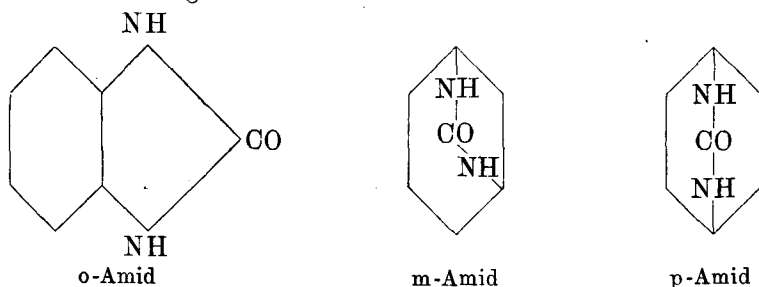


¹⁾ Ber. d. deutsch. chem. Gesellschaft. 18, 2277 (1885); s. ferner: Ber. 23, 1275 (1890) und Ber. 33, Sonderheft, S. LVIII. — ²⁾ Verhandlg. d. Gesellschaft. deutsch. Naturf. u. Aerzte 1899, II, 2, 86.

Das o-Amid aber erwies sich diesen Eingriffen gegenüber vollkommen resistent¹⁾.

Besser als durch Formeln in der Ebene lassen sich die stereochemischen Verhältnisse mittelst räumlicher Modelle veranschaulichen. Die Anwendung derselben giebt auch von den hier besprochenen Verhältnissen ein wesentlich deutlicheres Bild.

Von dem o-Carbamid muss angenommen werden, dass die beiden Ringsysteme in einer Ebene liegen; für die m- und p-Verbindung giebt aber das Modell ein viel einleuchtenderes Bild, wenn man diese Annahme fallen lässt. Zugleich zeigt sich, dass die p-Verbindung wesentlich symmetrischer gebaut sein dürfte als die m-Verbindung. In die Ebene projicirt, stellen sich die drei Formeln folgendermaassen dar:



Hiernach wird man geneigt sein, der p-Verbindung eine grössere Stabilität zuzuschreiben als der m-Verbindung. Der Unterschied kommt bei den erwähnten qualitativen Versuchen nicht zum Ausdruck, zu Messungen eignen sich diese Verbindungen aber wenig, weil das m- und p-Amid in Folge ihrer ausserordentlichen Schwerlöslichkeit in allen üblichen Lösungsmitteln der vollständigen Reinigung fast unüberwindliche Schwierigkeiten entgegenstellen; quantitative Versuche an Verbindungen von zweifelhafter Reinheit würden aber vollkommen werthlos sein.

Es war daher wünschenswerth, ein für solche Versuche geeigneteres Material zu besitzen. Die Oxalsäure hatte nur o-Amide geliefert; es war aber denkbar, dass ihre Homologen in Folge der in ihnen enthaltenen längeren Kohlenstoffketten sich weniger spröde erweisen und auch zur Ringcondensation mit m-

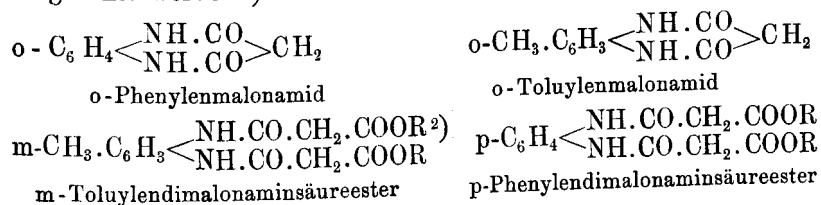
¹⁾ Die Versuche wurden mit den Carbamiden des o-Toluyldiamins, des m- und p-Phenylendiamins angestellt.

und p-Diaminen zu bringen sein würden. Ich habe daher gemeinsam mit zweien meiner Schüler, den Herren G. v. Lutzau und Joh. Maier, die Condensationsverhältnisse der aromatischen Diamine mit organischen Dicarbonsäuren bzw. deren Estern einem eingehenderen Studium unterworfen. Herr v. Lutzau untersuchte die Umsetzungen der Diamine mit Malon- und Bernsteinsäureester. Herr Maier condensirte die Diamine mit dem Diäthylester der Sebacinsäure und ging dann über zu dem Studium der Reactionen zwischen den Diaminen einerseits und den freien Dicarbonsäuren resp. deren Anhydriden andererseits. Bernsteinsäure und Bernsteinsäureanhydrid waren zunächst Gegenstand der Untersuchung; dann wurde auch die der Bernsteinsäure in vieler Hinsicht so ähnliche Phtalsäure, welche freilich nicht der aliphatischen, sondern der aromatischen Reihe angehört, in den Kreis der Untersuchung gezogen.

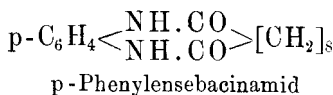
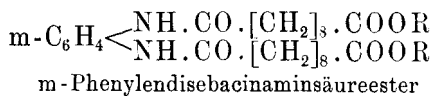
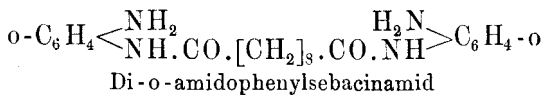
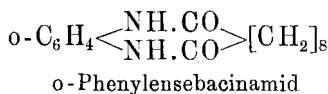
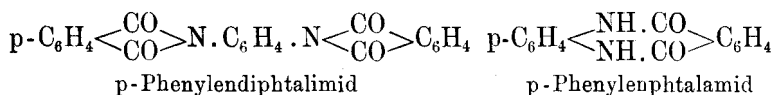
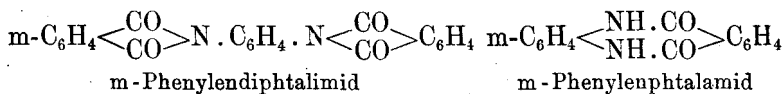
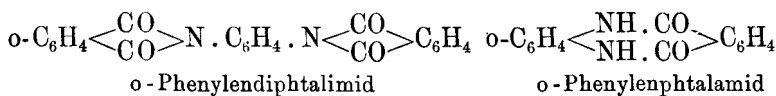
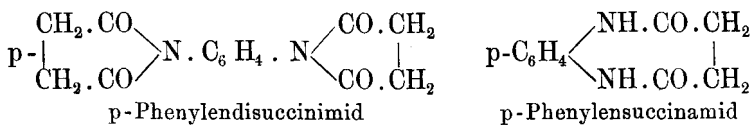
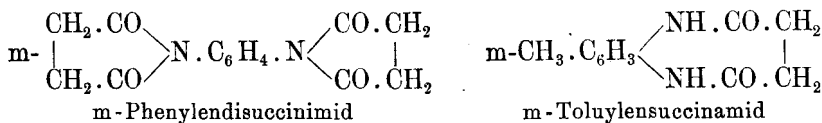
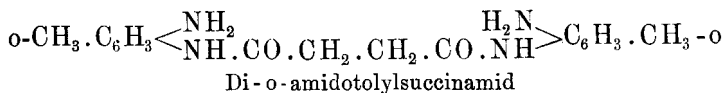
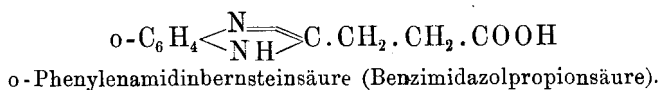
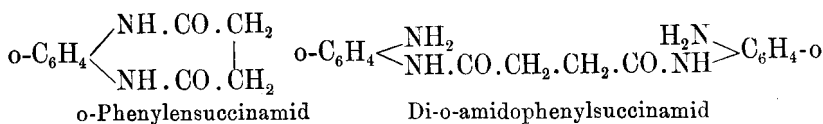
Die experimentellen Einzelheiten dieser synthetischen Versuche sollen später an anderer Stelle ausführlich mitgetheilt werden; hier wird es genügen, einen allgemeinen Bericht über die erhaltenen Resultate zu geben.

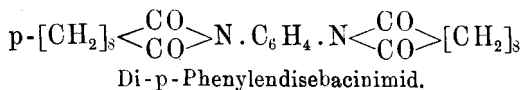
Während der Oxalester einfache Umsetzungen zeigte, stieg die Mannigfaltigkeit der Reactionen mit wachsender Kohlenstoffzahl der verwendeten Säure. Meist beschränkte sich die Einwirkung nicht auf eine Umsetzung, sondern es spielten sich mehrere Reactionen gleichzeitig neben einander ab, was die Arbeit nicht wenig erschwerte. Denn es ergab sich daraus die Nothwendigkeit, die Reactionsproducte von einander zu trennen, und die Ausbeute an den einzelnen Verbindungen war in Folge dessen oft eine recht beschränkte.

Nachstehend mögen nun zunächst die erhaltenen Körper aufgezählt werden ¹⁾:



¹⁾ Einige derselben sind schon von anderen Chemikern früher dargestellt worden. — ²⁾ R = C₂H₅.



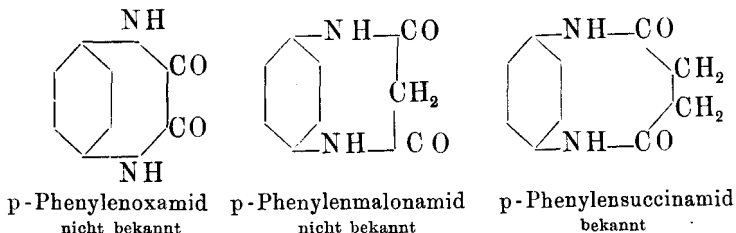


Gelegentlich wurden auch einige Malon- und Succinamide von Monaminen der Benzol- und Naphtalinreihe dargestellt, welche aber für den Gegenstand dieser Abhandlung nicht in Betracht kommen.

Die obige Zusammenstellung lässt die grosse Mannigfaltigkeit der eintretenden Umsetzungen deutlich erkennen. Eine eingehende Erörterung über die Ursachen des so verschiedenartigen Verlaufes scheinbar analoger Reactionen ist hier nicht beabsichtigt, jedoch seien die folgenden Bemerkungen gestattet.

Wie bereits erwähnt, hatte die Oxalsäure ringförmige Condensationsproducte nur mit o-Diaminen gegeben, das Gleiche gilt nun von der um eine CH_2 -Gruppe von der Oxalsäure differirenden Malonsäure. Die Bernsteinsäure dagegen liefert ein o-, ein m- und ein p-Amid, letzteres sogar mit besonderer Leichtigkeit. Ebenso konnten ringförmige Condensationsproducte ohne Schwierigkeit mittelst der Phtalsäure erzielt werden, während die Sebacinsäure eine solche Verbindung mit o- und p-Phenyldiamin gegeben hat.

Malonsäure verhält sich also im Wesentlichen noch wie Oxalsäure, von der Bernsteinsäure an tritt aber eine unverkennbar grössere Neigung zur Ringschliessung hervor. Der Grund für das verschiedene Verhalten dieser Säuren ist wohl nur in der verschiedenen Länge der in ihnen enthaltenen Kohlenstoffketten zu suchen: Längere Ketten werden unter sonst gleichen Umständen die Ringschliessung mit geringerer Spannung ermöglichen als kürzere, wie die folgenden Symbole erläutern mögen

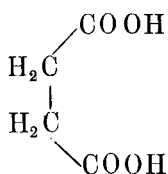


So erscheint ein kurzer Glasfaden spröde und bricht bei

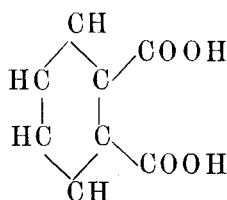
dem geringsten Versuche, ihn zu biegen, während man einen langen ohne Schwierigkeit zu einer Schleife zusammenfügen kann.

Bei der Sebacinsäure besteht die Kette sogar aus zehn Kohlenstoffatomen, die Biegsamkeit wird hier also noch bedeutend grösser sein.

Die Phtalsäure stellt sich der Bernsteinsäure unmittelbar zur Seite:



Bernsteinsäure



Phtalsäure

Die hier ausgesprochene Annahme erhält dadurch eine Stütze, dass man für die drei ersten Glieder der Oxalsäurereihe nach den Affinitätsverhältnissen eher das entgegengesetzte Verhalten erwarten sollte. Die Amidbildung mittelst der Ester erfolgt unter Abspaltung von Alkohol und ist daher gewissermaassen als ein Verseifungsprocess zu betrachten. Nun hat Edv. Hjelt die Verseifungsgeschwindigkeiten normaler Dicarbonsäureester gemessen und gefunden, dass dieselben mit der grösseren Entfernung der Carboxylgruppen sehr stark und in gleichem Sinne abnehmen wie die Dissociationsconstanten¹⁾:

	Dissociations- constanten ²⁾	Verseifungs- geschwindigkeit
Oxalsäure . . .	10	—
Malonsäure . .	0,158	0,224
Bernsteinsäure .	0,00665	0,088
.
Sebacinsäure .	0,00238	0,037

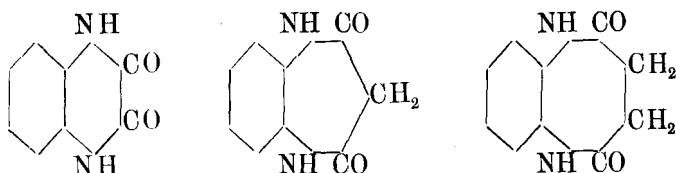
Wäre daher die verschiedene Acidität die Ursache des verschiedenen Verhaltens, so sollte man erwarten, dass Oxalsäure am leichtesten, Bernsteinsäure resp. Sebacinsäure am schwersten die mit der Ringschliessung verbundene Spannung überwindet, während thatsächlich das Gegentheil der Fall ist.

¹⁾ Ber. d. deutsch. chem. Gesellsch. 31, 1847 (1898). — ²⁾ W. Ostwald, Zeitschr. f. physikal. Chemie 3, 281 ff.

Dass die Phtalsäure bei gleicher Entfernung der Carboxylgruppen augenfällig leichter die ringförmigen Amide bildet als Bernsteinsäure, ist aber wohl auf die durch die Anwesenheit des negativen Benzolringes bedingten stärker sauren Eigenschaften der ersteren Säure zurückzuführen. In der That beträgt die Dissociationsconstante der Phtalsäure 0,121¹⁾.

Die Ausbeute der synthetischen Versuche an ringförmigen Condensationsproducten war in den meisten Fällen nur eine mässige. Noch kleiner ist die Zahl derjenigen Verbindungen, welche sich für die beabsichtigten, messenden Versuche eignen.

Aus Oxal- und Malonsäure waren ringförmige m- und p-Derivate überhaupt nicht erhalten worden. In der Bernsteinsäurereihe war es zwar gelungen, ein o-, ein m- und ein p-Amid darzustellen; für die messende Vergleichung musste aber das m-Toluylen-succinamid zunächst ausgeschieden werden, da es mit den beiden anderen nicht isomer, sondern homolog ist. Die Sebacinsäure hatte nur ein o- und ein p-Amid gegeben, und die Ausbeute an diesen Körpern war so unzureichend, dass die Darstellung der für derartige Versuche erforderlichen Mengen schon aus ökonomischen Gründen aufgegeben werden musste. Günstiger lagen die Verhältnisse bei der Phtalsäure, und die mittelst dieser erhaltenen Amide wurden deshalb auch zuerst herangezogen. Bei den Amidn der Bernsteinsäure war immerhin ein Vergleich der o- und p-Verbindung möglich. — Im Uebrigen schien es von Interesse, auch die o-Amide der Oxal-, Malon- und Bernsteinsäure



hinsichtlich ihrer Stabilität zu vergleichen.

Um für die Beständigkeit von Ringsystemen, resp. eine in ihnen herrschende Spannung ziffermässige Anhaltspunkte zu gewinnen, kann man an verschiedene Wege denken. Am nächsten liegt es offenbar, die Ringe hydrolytisch zu spalten und den

¹⁾ W. Ostwald, Zeitschr. f. physik. Chemie 3, 376.

zeitlichen Verlauf der Hydrolyse messend zu verfolgen¹⁾. Voraussetzung für die Anwendung dieser Methode ist, dass es gelingt, einen Modus der Hydrolyse zu finden, welcher bei den verschiedenen, unmittelbar zu vergleichenden Körpern qualitativ gleich und dabei mit genügender Langsamkeit verläuft. Man konnte hoffen, durch Kochen mit Wasser, oder auch mit verdünnten Säuren oder Alkalilösungen dieses Ziel zu erreichen. Die Amide konnten hierbei entweder in Säure und Base gespalten, resp. in die betreffenden Salze übergeführt werden, oder es konnte die Spaltung auch nur partiell verlaufen und unter Sprengung des Amidringes zu den entsprechenden Anilsäuren führen. Da die Amide nahezu neutrale, resp. ganz schwach saure Körper sind, die freien Diamine aber, im Vergleiche mit der Acidität der angewandten zweibasischen Säuren, schwache Basen, so musste die Hydrolyse mit einer Veränderung in der Acidität der Lösung verbunden sein, welche maassanalytisch zu verfolgen wäre. Ferner war in jedem Falle anzunehmen, dass in Folge der Hydrolyse die elektrolytische Leitfähigkeit bedeutend zunehmen würde, und es ergab sich daher die Aussicht, den Verlauf des Processes durch Leitfähigkeitsbestimmungen zu verfolgen.

Ein anderes Mittel, die in den einzelnen Ringsystemen herrschende Spannung zu bestimmen, ergibt sich aus der Erwägung, dass Systeme verschiedener Spannung offenbar einen verschiedenen Energieinhalt besitzen müssen. Da die Ueberwindung der Spannung bei der Bildung der betreffenden Verbindungen eine Arbeitsleistung ist, also einen Aufwand von Energie erfordert, so muss der Energieinhalt der Verbindung mit der Spannung wachsen. Ein Mittel, diesen Energieinhalt zu bestimmen, bietet nun die Thermochemie. Misst man die molekulare Verbrennungswärme einer Verbindung und berechnet ihre Differenz gegenüber der Verbrennungswärme der in ihr enthaltenen Elemente, so resultirt die Bildungswärme des Körpers. Da bei der Verbrennung die bei der Bildung des Körpers aufgewendete Energie in Form von Wärme frei wird, so wird unter sonst gleichen Bedingungen die Verbrennungswärme um so grösser sein, je grösser die Spannung. Vielleicht ist dies

¹⁾ Den umgekehrten Vorgang der Ringschliessung hat Edv. Hjelt an einer Anzahl von Lactonen in entsprechender Weise studirt.

nicht in aller Strenge richtig; doch darf man nach den bisherigen Erfahrungen annehmen, dass wenigstens bei Körpern ähnlicher Constitution die Verbrennungswärme einen relativen Maassstab für den Energieinhalt bildet.

In seinen Untersuchungen über die Hydrirung geschlossener Ringe hat F. Stohmann auch eine Reihe calorimetrischer Messungen in dem zuletzt angedeuteten Sinne ausgeführt ¹⁾. Dieselben beziehen sich auf die Carbonsäuren des Dimethylens ²⁾, des Tri-, Tetra- Penta- und Hexamethylens, also auf rein carbocyclische Systeme. Die Ergebnisse stimmen im Grossen und Ganzen mit der Baeyer'schen Spannungstheorie, insofern sie zu dem Schlusse führen, dass die Schliessung des Di-, Tri- und Tetramethylenringes einen erheblichen Aufwand von Energie bedingt, während die Schliessung des Penta- und Hexamethylenringes weit weniger Energie erfordert.

Wir haben zunächst den thermochemischen Weg betreten ³⁾. Zur Bestimmung der Verbrennungswärmen diente eine Hempel'sche Bombe, in welcher die Verbrennungen nach dem Vorgange Berthelot's mittelst comprimierten Sauerstoffs ausgeführt werden. Bei den ersten Versuchen benutzten wir ein in $\frac{1}{10}^{\circ}$ getheiltes Thermometer, welches später durch ein in $\frac{1}{50}^{\circ}$ getheiltes ersetzt wurde. Die mit beiden ausgeführten Controlbestimmungen ergaben in den Endresultaten für das letztere keinen höheren Grad von Genauigkeit als für ersteres.

Die Aichung des Apparates geschah durch Verbrennung von Körpern bekannten Wärmewerthes. Als solche benutzten wir Naphtalin, Rohrzucker und Acetanilid. Letzteres wurde bevorzugt, weil es ebenso wie die zu untersuchenden Körper stickstoffhaltig ist. — Nach der Verbrennung der stickstoffhaltigen Verbindungen bemerkten wir beim Oeffnen der Bombe stets einen schwachen Geruch nach Blausäure oder Cyan, doch konnten diese Gase durch Reagentien nicht nachgewiesen werden; ihre Menge

¹⁾ Journ. f. pr. Chemie [2], 43, 1, 538; 45, 475. — ²⁾ Nach dem Vorgange Baeyer's wird das Aethylen als zweigliedriges Ringsystem aufgefasst. — ³⁾ Die nachfolgend beschriebenen Versuche wurden von Herrn J. Maier ausgeführt.

ist daher verschwindend klein und kann auf das Resultat der Versuche keinen Einfluss ausüben.

Bei Anwendung des in $1/10^{\circ}$ getheilten Thermometers entsprach einer Temperaturerhöhung von $1/10^{\circ}$ eine Wärmemenge von 0,132 Cal.; für das in $1/50^{\circ}$ getheilte Thermometer war die Constante 0,135 Calorien pro $1/10^{\circ}$.

Beispiel einer Bestimmung der Constanten für das in $1/10^{\circ}$ getheilte Thermometer. 1,3462 g Acetanilid gaben bei der Verbrennung in der Bombe eine Temperaturerhöhung des Calorimeterwassers von $7,67^{\circ}$. Das Molekulargewicht des Acetanilids ist 135; seine molekulare Verbrennungswärme 1016,8 Cal.; 1,3462 g entwickeln daher bei der Verbrennung

$$\frac{1,3462 \cdot 1016,8}{135} \text{ Cal.},$$

welche die beobachtete Temperaturerhöhung von $7,67^{\circ}$ hervor- gebracht haben. Demnach entspricht einer Temperaturerhöhung von $1/10^{\circ}$: $\frac{1,3462 \cdot 1016,8 \cdot 0,1}{135 \cdot 7,67} = 0,1321 \text{ Cal.}$

Die folgenden Bestimmungen wurden mit Ausnahme der einen, bei welcher es besonders bezeichnet ist, mit dem in $1/10^{\circ}$ getheilten Thermometer ausgeführt.

Es wurde zunächst das freie o-Phenylendiamin, $C_6H_4(NH_2)_2$, in der Bombe verbrannt. Die Darstellung der freien Base im reinen Zustande aus dem Chlorhydrate ist nicht ganz leicht. Sie gelang aber durch Schütteln des Chlorhydrates mit Kalkbrei und Aether; durch gebrannten Kalk wurde dann die ätherische Lösung getrocknet und der Aether abdestillirt, wodurch die Base rein und farblos erhalten wurde.

1. 1,0320 g Diamin bewirkten bei der Verbrennung eine Temperaturerhöhung von $6,00^{\circ}$.

2. 0,9445 g Diamin gaben eine Erhöhung von $5,45^{\circ}$.

Daraus berechnet sich die molekulare Verbrennungswärme ($M = 108$):

$$1. M_w = \frac{108 \cdot 6,00 \cdot 0,132}{0,1 \cdot 1,0320} = 828,8 \text{ Cal.}$$

$$2. M_w = \frac{108 \cdot 5,45 \cdot 0,132}{0,1 \cdot 0,9445} = 822,6 \text{ Cal.}$$

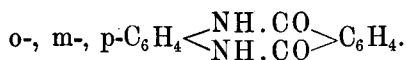
Zu Versuch 2 hatte ein etwas älteres, nicht mehr ganz farbloses Präparat gedient; der Werth 1 dürfte daher der genauere sein.

Ferner wurde der o-Phenylharnstoff, $C_6H_4 \begin{smallmatrix} \text{NH} \\ \text{NH} \end{smallmatrix} \text{CO}$ verbrannt, jedoch konnte aus Mangel an Material nur eine Bestimmung ausgeführt werden.

1,2401 g Harnstoff gaben eine Temperaturerhöhung von $5,70^\circ$ ($M = 134$).

$$M_w = \frac{134 \cdot 5,70 \cdot 0,132}{0,1 \cdot 1,2401} = 812,0 \text{ Cal.}$$

Verbrennungswärme der drei Phenylphtalamide.



I. o-Phenylphtalamid.

1. 0,7494 g Amid gaben eine Temperaturerhöhung von $3,85^\circ$
2. 0,9943 „ „ „ „ „ $5,07^\circ$
3. 1,0275 „ „ „ „ „ $5,25^\circ$
4. 0,8466 „ „ „ „ „ $4,23^{(1)}$.

Berechnung ($M = 238$):

$$1. M_w = \frac{238 \cdot 3,85 \cdot 0,132}{0,1 \cdot 0,7494} = 1613,8 \text{ Cal.}$$

$$2. M_w = \frac{238 \cdot 5,07 \cdot 0,132}{0,1 \cdot 0,9943} = 1599,1 \text{ Cal.}$$

$$3. M_w = \frac{238 \cdot 5,25 \cdot 0,132}{0,1 \cdot 1,0275} = 1605,8 \text{ Cal.}$$

$$4. M_w = \frac{238 \cdot 4,23 \cdot 0,135}{0,1 \cdot 0,8466} = 1581,5 \text{ Cal.}$$

$$\text{Mittel: } M_w = 1600,0 \text{ Cal.}$$

II. m-Phenylphtalamid.

1. 1,1406 g Amid gaben eine Temperaturerhöhung von $5,72^\circ$.
2. 1,2324 „ „ „ „ „ $6,32^\circ$.

¹⁾ Diese Bestimmung wurde mit dem in $\frac{1}{50}^\circ$ getheilten Thermometer ausgeführt.

Demnach:

$$1. M_w = \frac{238.5,72.0,132}{0,1.1,1406} = 1573,9 \text{ Cal.}$$

$$2. M_w = \frac{238.6,32.0,132}{0,1.1,2324} = 1598,6 \text{ Cal.}$$

$$\text{Mittel: } M_w = 1586,2 \text{ Cal.}$$

III. p-Phenylenphtalamid.

1. 0,6976 g Amid gaben eine Temperaturerhöhung von 3,50°.

2. 0,8735 „ „ „ „ „ 4,35°.

Also:

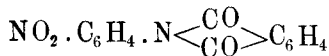
$$1. M_w = \frac{238.3,50.0,132}{0,1.0,6976} = 1573,9 \text{ Cal.}$$

$$2. M_w = \frac{238.4,35.0,132}{0,1.0,8735} = 1567,7 \text{ Cal.}$$

$$\text{Mittel: } M_w = 1570,8 \text{ Cal.}$$

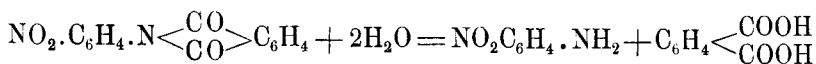
Die Unterschiede sind, wie man sieht, nicht gross, die Werthe für das m- und p-Amid müssen wohl als identisch angesehen werden. Der Wärmewerth des o-Amides scheint, entgegen der Erwartung, etwas grösser zu sein als der der isomeren Verbindungen; doch ist das Versuchsmaterial noch nicht umfassend genug, um in dieser Hinsicht einen sicheren Schluss zu gestatten. Es erscheint daher auch verfrüht, in eine Discussion dieser Frage einzutreten. Dies muss verschoben werden, bis auch die Amide der Oxalsäure, der Malon- und der Bernsteinsäure in der Bombe verbrannt sein werden.

Die hydrolytische Spaltung ringförmiger Systeme messend zu verfolgen, ist uns bis jetzt noch nicht möglich gewesen. Dagegen konnten wir eine orientirende Versuchsreihe mit den nicht ringförmigen o-, m- und p-Nitrophthalanilen



durchführen¹⁾. Beim Kochen mit Wasser zerfallen diese Verbindungen vollkommen in die Componenten:

¹⁾ Versuche von Herrn J. Maier.



Da die Nitrophthalanile farblose, in Wasser praktisch unlösliche Körper, die Componenten aber wasserlöslich und die Nitraniline intensiv gelb gefärbt sind, so verwandeln sich die ursprünglich farblosen Suspensionen durch das Kochen mit Wasser in gelbe Lösungen, deren Farbentiefe mit der Dauer des Versuches zunimmt. Es schien daher möglich, diese Vorgänge colorimetrisch zu verfolgen.

In Jenaer Kolben, welche zunächst längere Zeit mit Wasser ausgekocht worden waren, erhitzen wir die Nitrophthalanile mit Wasser möglichst schnell zum Sieden. Der Siedepunkt war in fünf bis sechs Minuten erreicht. Von diesem Momente an, welcher als Beginn der Hydrolyse betrachtet werden konnte, wurden dann in gemessenen Zeitintervallen Proben der Flüssigkeit genommen und in einem Krüss'schen Spectrocolorimeter untersucht. Zum Vergleiche diente eine $\frac{1}{1000}$ n-Lösung von Nitranilin und Phtalsäure. Der Phtalsäurezusatz erwies sich freilich als nicht nothwendig, da festgestellt werden konnte, dass Nitranilinlösungen ohne Phtalsäure von gleicher Farbstärke waren. In Uebereinstimmung hiermit liess sich aus den verdünnten phtalsäurehaltigen Lösungen Nitranilin mit Aether quantitativ ausschütteln, während von der Phtalsäure kaum etwas in den Aether überging. Ein Salz des sehr schwach basischen Nitranilins mit Phtalsäure scheint demnach in der Lösung nicht vorhanden zu sein.

Sollte eine Probe genommen werden, so wurde das Sieden unterbrochen und möglichst schnell durch fließendes Wasser auf die Temperatur der Vergleichslösung abgekühlt. Vor der Untersuchung im Colorimeter wurden beide Lösungen durch passendes Verdünnen der Vergleichslösung annähernd auf gleiche Farbstärke gebracht. Unterlässt man diese Vorsicht, so gelangt man zu vollkommen unrichtigen Ergebnissen, da der Farbenton der Lösung, offenbar in Folge von Ionisirung, wesentlich von der Concentration abhängig ist. Die n-Lösung erscheint bei einer Höhe von 10 cm weit röther als dieselbe Lösung nach Verdünnung auf das Zehnfache in einer Schicht von 100 cm; die verdünnte Lösung hat einen deutlichen Stich ins Grünliche.

Verschiedenheit im Farbenton zwischen den beiden Lösungen macht aber die Vergleichung ausserordentlich schwierig oder vollkommen illusorisch.

Beispielsweise wurden folgende Ergebnisse erhalten, wobei bedeutet t : die Zeit in Minuten; u : die Normalität der Vergleichslösung; h_v : die Höhe der Versuchslösung; h_u : die Höhe der Vergleichslösung; K : die in einer Minute umgesetzte Menge in Normalitäten ($K = \frac{u \cdot h_u}{t \cdot h_v}$).

I. o-Nitrophthalanil.

t	u	h_v	h_u	K
35	$\frac{1}{4} \cdot 10^{-3}$	100	58	$0,41 \cdot 10^{-5}$
65	$\frac{1}{4} \cdot 10^{-3}$	99	88	$0,34 \cdot 10^{-5}$
92	$\frac{1}{4} \cdot 10^{-3}$	75	100	$0,36 \cdot 10^{-5}$
120	$\frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$	100	88	$0,36 \cdot 10^{-5}$
153	$\frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$	90	100	$0,36 \cdot 10^{-5}$
180	$\frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$	78	100	$0,36 \cdot 10^{-5}$

II. o-Nitrophthalanil.

t	u	h_v	h_u	K
60	$\frac{1}{4} \cdot 10^{-3}$	100	54	$0,225 \cdot 10^{-5}$
120	$\frac{1}{4} \cdot 10^{-3}$	100	95	$0,198 \cdot 10^{-5}$
185	$\frac{1}{4} \cdot 10^{-3}$	70	96	$0,185 \cdot 10^{-5}$
225	$\frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$	99	84	$0,188 \cdot 10^{-5}$
317	$\frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$	88	98,5	$0,175 \cdot 10^{-5}$
377	$\frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$	78	100	$0,172 \cdot 10^{-5}$

Die Versuchsdaten für die p-Verbindung sind leider bis auf das Endresultat verloren gegangen.

Die Versuche führen zu dem Schlusse, dass die Zersetzung in wässriger Lösung nahezu eine lineare Function der Zeit ist. Die Berechnung ergiebt folgende Beziehungen:

o-Nitrophtalanil	$M_t = 0,36 \quad t \cdot 10^{-5}$
m- "	$M_t = 0,180 \quad t \cdot 10^{-5}$
p- "	$M_t = 0,250 \quad t \cdot 10^{-5}$

wo M_t die in t Minuten hydrolysirte Menge in Normalitäten bedeutet. Durch Multiplication von M_t mit dem Moleculargewichte der Nitrophtalanile, 138, erhält man die hydrolysirten Mengen in Grammen per Liter.

Der lineare Verlauf des Vorganges lässt darauf schliessen, dass derselbe nicht umkehrbar ist. Dies ist in der That der Fall, da es nicht möglich war, in wässriger Lösung aus den Componenten die unlöslichen Nitrophtalanile zu gewinnen. Zugleich zeigen die Versuchsergebnisse für die drei isomeren Verbindungen sehr erhebliche Unterschiede in der Beständigkeit. Die o-Verbindung wird am schnellsten, die m-Verbindung am langsamsten gespalten.

Die mitgetheilten Versuche können nur als Vorarbeiten für eine wirkliche Erforschung des Gebietes betrachtet werden, in welches wir einzudringen wünschten. Die Hauptschwierigkeit liegt in der Beschaffung des Versuchsmaterials, und es wird noch andauernder, geduldiger Arbeit bedürfen, um dieses in ausreichendem Maasse zu erlangen. Aber nur auf der festen Grundlage reichhaltigen Beobachtungsmaterials wird sich ein Beitrag zur Theorie der Ringschliessungen gewinnen lassen, welcher unsere Kenntniss dieser wichtigen Vorgänge in irgend nennenswerthem Grade zu erweitern vermag.

BEVÖLKERUNGSBEWEGUNG
UND
GESUNDHEITSZUSTAND
DER
STADT BRAUNSCHWEIG

IN DEN
JAHREN 1895 BIS 1899.

HYGIENISCH-KRITISCHE STUDIE AUF STATISTISCHER
GRUNDLAGE.

VON
RUDOLF BLASIUS.

Es ist die Pflicht jedes Menschen, sich in gewissen Zeiträumen Rechenschaft abzulegen über das, was er eingenommen und ausgegeben und das, was er geleistet hat. Jeder Familienvater wird am Ende des Jahres sich einen Ueberschlag machen über die Einnahmen, und Ausgaben, die das verflossene Jahr für das Haus gebracht hat und sich dann überzeugen, ob das Ergebniss eine weise Führung des Haushaltes anzeigt oder nicht. Eine grössere Gemeinschaft, wie eine Actien-Gesellschaft, ein Fabrikunternehmen oder irgend ein industrielles Etablissement wird am Ende des Geschäftsjahres ihre Bilanz ziehen und daraus ersehen, ob sie richtig gewirthschaftet hat. Alles dies geschieht durch genaue Aufstellung von Zahlen.

Wenn wir klar sehen wollen, müssen wir uns der Zahlen bedienen.

Es lohnt sich nun gewiss, auch bei einem grösseren Gemeinwesen, wie einer Stadt, sich davon zu überzeugen, ob dieselbe sich in normalen richtigen Bahnen entwickelt hat oder nicht. Es geschieht dieses nicht bloss dadurch, dass man die jährlichen Einnahmen und Ausgaben im städtischen Haushaltsetat neben einander stellt und sieht, ob die von den Bürgern der Stadt zur Deckung der Kosten erhobenen Steuern auch nicht das Leistungsvermögen der Einzelnen übersteigen — sondern auch dadurch, dass man, und zwar immer für einen grösseren Zeitraum, die Bevölkerungsbewegung der Stadt und den Gesundheitszustand derselben ziffermässig feststellt und sich dann die Frage vorlegt und beantwortet, ob dieselben den normalen Verhältnissen entsprechen oder nicht. So gut, wie Alles in der Natur nach bestimmten unwandelbaren Naturgesetzen vor sich geht, ist es auch bei der Bewegung der Bevölkerung, der Zunahme derselben durch Geburten, der Abnahme derselben

durch Todesfälle. Auch hierfür gelten bestimmte, durch die Statistik festgestellte Grundsätze. Wir sprechen von einer normalen jährlichen Bevölkerungszunahme, von einem normalen Verhältniss der Todtgeborenen zu den Lebendgeborenen, von einer normalen Sterblichkeitsziffer (Verhältniss der Gestorbenen zu 1000 Lebendeinwohnern der Bevölkerung auf das Jahr berechnet) u. s. w. Wir kennen eine Reihe von Krankheiten, die wir mit Erfolg bekämpfen können, und da Krankheit ein gezwungenes Nichtsthun ist, die Krankheit das Erwerben schädigt und da der Kranke, abgesehen davon, dass er nichts verdient, auch noch durch Pflege, ärztliche Behandlung, Arzneien Kosten verursacht, so findet durch Krankheiten eine empfindliche nationalökonomische Schädigung des Einzelnen, der Familie, der Gemeinde, des Staates statt. Gelingt es uns daher, eine Krankheit mit Erfolg zu bekämpfen — wo möglich durch hygienische Maassregeln ihre Entstehung überhaupt zu verhindern —, so werden wir dadurch einen bedeutenden nationalökonomischen Nutzen verursachen.

Von diesem Standpunkte aus ist es also gewiss berechtigt, an die Beantwortung der Frage heranzutreten: Hat die Stadt Braunschweig in den letzten fünf Jahren des verflossenen Jahrhunderts sich in ihrer Bevölkerung und in ihrem Gesundheitszustande in normaler Weise entwickelt oder nicht? Nur die statistischen Zahlen können uns die Grundlagen zu der Antwort liefern.

Diese liegen in den nebenstehend für die fünf Jahre 1895 bis 1899 abgedruckten Tabellen vor. Dieselben sind in der Weise gewonnen, dass das herzogliche statistische Bureau hierselbst, geleitet von Herrn Finanzrath Dr. Zimmermann, die Resultate der Volkszählungen mittheilte und für jedes Jahr die berechnete Bevölkerungsziffer angab und dass auf dem hiesigen Standesamte, geleitet von Herrn Hauptmann Pricelius, die eingehenden Geburts- und Todesscheine wöchentlich, dann monatlich, endlich jährlich bearbeitet wurden. In der Stadt Braunschweig wird bei jeder Todesanmeldung ein ärztlicher Todtenschein verlangt. Die Todesarten wurden von mir wöchentlich für das kaiserliche Gesundheitsamt, monatlich und jährlich für den Verein für öffentliche Gesundheitspflege, bezw. dessen

	Geburten							Zahl der Todesfälle ohne Todtgeburten	Alter der Gestorbenen								Todesursachen																									Einwohnerzahl
	Lebend-geborene			Todt-geborene			Ueberhaupt		0 bis 1 Jahr		1 bis 5 Jahr		5 bis 20 Jahre	20 bis 40 Jahre	40 bis 60 Jahre	über 60 Jahre	unbekannt	Infectionskrankheiten												Andere vorherrschende Krankheiten										Gewalt-samer Tod		
	ehelich	unehelich	Summe	ehelich	unehelich	Summe			ehelich	unehelich	Masern und Röheln	Scharlach						Diphtheritis	Croup	Stückhusten	Unterleibs-typhus	Flecktyphus	Epidemische Genickstarre	Ruhr	Puerperalfieber	Syphilis	Andere Infections-krankheiten	Darunter Influenza	Lungen-schwindsucht	Lungen-entzündung	Acuter Bron-chialkatarrh	Andere Er-krankungen der Athmungs-organe	Gehirn-schlag-fluss	Acuter Gelenk-rheumatismus	Acuter Darmkatarrh	Brechdurchfall	Alkoholismus	Alle übrigen Krank-heiten				
																																							Gewaltsamer Tod (excl. Selbstmord)		Selbstmord	
Januar	270	61	331	8	1	9	340	197	45	9	19	2	11	18	47	46	—	3	1	6	—	2	—	—	1	—	1	4	2	1	25	14	10	4	4	—	5	2	1	104	3	5
Februar	248	52	300	6	—	6	306	153	30	9	17	3	15	21	27	31	—	3	1	2	—	—	—	—	1	—	—	—	3	—	17	7	8	6	11	—	7	2	—	79	1	5
März	298	45	343	10	4	14	357	272	47	15	33	4	12	32	38	91	—	8	—	4	1	—	—	—	—	—	—	36	29	22	28	22	17	11	2	6	3	1	105	1	4	
April	279	48	327	7	1	8	335	230	61	12	32	2	8	27	30	58	—	14	—	2	—	2	1	—	—	—	—	14	10	31	18	22	7	5	—	6	5	—	96	4	3	
Mai	272	43	315	9	1	10	325	206	49	16	31	2	10	22	33	43	—	9	1	2	1	—	2	—	—	—	—	—	—	—	21	14	11	8	11	—	10	3	—	97	1	5
Juni	276	47	323	4	2	6	329	219	60	29	28	5	11	22	23	41	—	8	1	1	—	2	—	—	—	—	—	1	1	23	13	10	8	4	1	59	68	—	111	1	4	
Juli	280	35	315	9	1	10	325	310	132	39	30	4	10	17	34	44	—	2	—	1	—	1	—	—	—	—	—	—	—	1	28	7	4	2	1	—	42	51	—	83	3	2
August	272	43	315	6	3	9	324	236	98	23	23	2	10	23	25	32	—	2	1	5	—	1	—	—	—	—	—	—	3	2	28	7	4	2	1	—	43	9	—	62	5	5
September	305	36	341	13	2	15	356	156	43	15	20	1	9	16	20	32	—	1	1	6	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	22	9	1	5	4	—	43	9	—	80	1	3
October	283	41	324	8	—	8	332	169	39	12	13	1	11	19	31	43	—	—	2	2	—	—	1	—	—	—	—	—	3	2	20	17	8	6	5	1	13	7	—	81	4	4
November	270	44	314	11	—	11	325	155	44	6	7	1	13	23	31	30	—	—	2	1	1	—	4	—	—	—	—	—	4	4	19	10	5	4	6	—	5	2	—	73	3	4
December	251	36	287	4	1	5	292	166	31	11	21	1	9	19	30	44	—	—	3	1	3	5	1	—	—	—	—	—	2	2	27	10	9	12	5	—	5	3	—	1064	32	46
1895	3304	531	3835	95	16	111	3946	2469	679	196	274	28	129	259	369	535	—	50	13	33	6	11	11	—	6	—	4	11	71	53	285	163	117	91	72	5	191	185	2	1064	32	46
	3835			111				alle auf- ohne et	27,50	7,94	11,10	1,13	5,22	10,49	14,95	21,67	—	2,03	0,53	1,34	0,24	0,45	0,45	—	0,24	—	0,16	0,45	2,88	2,15	11,54	6,60	4,74	3,69	2,92	0,20	7,74	7,49	0,08	43,09	1,29	1,55

33,31 pro Mille zur Gesamtbevölkerung auf 1000 Einwohner berechnet.

2,81 Proc. zur Gesamtzahl der Geburten

21,44 pro Mille auf 1000 Einwohner berechnet

Procent zur Gesamtzahl der Gestorbenen

Januar	304	69	373	11	4	15	388	169	34	9	22	1	7	19	28	49	—	—	2	3	2	1	1	1	—	—	2	1	4	3	23	14	8	9	8	1	4	3	—	78	1	3
Februar	299	46	345	8	4	12	357	147	31	10	22	1	5	23	20	35	—	—	2	2	1	3	—	—	—	—	—	—	4	3	21	9	5	6	9	—	1	—	—	76	3	5
März	318	43	361	8	1	9	370	207	49	16	19	3	16	25	33	46	—	—	4	3	3	2	1	—	—	—	1	2	5	4	22	11	10	11	9	1	6	3	1	106	3	3
April	280	43	323	9	1	10	333	181	35	15	17	1	11	24	35	42	1	—	2	3	—	2	—	—	—	—	3	1	2	2	19	19	5	13	5	1	4	3	—	90	2	7
Mai	294	54	348	6	2	8	356	186	31	13	17	1	16	28	34	46	—	—	1	—	—	3	2	—	—	—	—	—	1	—	37	14	3	9	10	—	6	1	1	85	4	9
Juni	276	39	315	11	—	11	326	160	36	14	20	2	10	17	29	32	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	—	26	16	5	5	5	1	3	6	—	77	5	2	
Juli	327	49	376	12	5	17	393	208	76	14	15	1	8	24	33	37	—	—	—	1	—	3	1	—	1	—	—	1	1	27	12	11	4	5	—	12	24	1	94	5	5	
August	318	48	366	6	1	7	373	207	80	27	17	2	7	24	25	25	—	—	—	3	—	6	—	—	—	1	—	—	2	—	22	7	9	8	4	—	27	40	—	71	3	4
September	280	41	321	13	1	14	335	179	56	18	11	5	11	22	26	29	1	—	—	3	—	4	2	—	—	—	—	1	—	20	7	6	1	4	1	28	9	1	83	3	6	
October	275	36	311	11	3	14	325	175	59	14	16	—	12	24	26	23	1	—	—	1	1	6	2	—	—	—	—	—	2	—	19	12	7	5	5	—	21	6	—	80	1	6
November	255	40	295	10	—	10	305	154	53	9	12	—	7	16	36	41	—	—	—	1	—	2	—	—	—	—	—	—	6	5	26	16	5	12	3	—	5	3	—	85	5	3
December	280	46	326	10	1	11	337	177	33	12	16	1	10	21	43	41	—	—	2	1	1	4	—	—	—	—	—	—	6	5	26	16	5	12	3	—	5	3	—	85	5	3
1896	3506	554	4060	115	23	138	4198	2150	553	171	204	18	120	267	368	446	3	—	14	21	9	39	10	1	1	1	7	6	31	17	281	146	81	94	74	6	126	99	4	1005	36	58
	4060		138					auf einer t	25,72	7,95	9,49	0,84	5,58	12,42	17,12	20,74	0,14	—	0,65	0,98	0,42	1,81	0,47	0,05	0,05	0,05	0,33	0,28	1,44	0,79	13,06	6,80	3,77	4,37	3,44	0,28	5,86	4,60	0,19	46,73	1,67	2,70

34,42 pro Mille zur Gesamtbevölkerung auf 1000 Einwohner berechnet

3,29 Proc. zur Gesamtzahl der Geburten

18,23 pro Mille auf 1000 Einwohner berechnet

Procent zur Gesamtzahl der Gestorbenen

Geburten							Zahl der Todesfälle ohne Todtgeburten	Alter der Gestorbenen							Todesursachen																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
Lebend-geborene			Todt-geborene			Ueberhaupt		0 bis 1 Jahr		1 bis 5 Jahr		5 bis 20 Jahre	20 bis 40 Jahre	40 bis 60 Jahre	über 60 Jahre	unbekannt	Infectionskrankheiten														Andere vorherrschende Krankheiten										Alle übrigen Krankheiten	Gewalt-samer Tod		Einwohnerzahl																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																									
ehelich	unehelich	Summe	ehelich	unehelich	Summe			ehelich	unehelich	ehelich	unehelich						Masern und Röttheln	Scharlach	Diphtheritis	Croup	Stiekhusten	Unterleibstypus	Flecktyphus	Epidemische Genickstarre	Ruhr	Puerperalfieber	Syphilis	Andere Infectionskrankheiten	Darunter Influenza	Lungenschwindsucht	Lungenentzündung	Acuter Bronchialkatarrh	Andere Erkrankungen der Athmungsorgane	Gehirn-schlag-fluss	Acuter Gelenk-rheumatismus	Acuter Darmkatarrh	Brechdurchfall	Alkoholismus	Trichinosis	Gewaltsamer Tod (excl. Selbstmord)		Selbstmord																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
Januar	295	47	342	14	1	15	357	147	25	10	8	2	12	25	34	31	—	—	1	1	—	—	—	6	2	30	10	7	7	5	1	8	1	—	—	66	—	1	120 774																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																														
Februar	286	39	325	5	1	6	331	173	35	14	17	5	9	21	35	37	—	—	1	2	1	—	—	3	1	30	15	4	9	8	—	12	3	—	—	82	—	—																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																															
März	285	56	341	7	—	7	348	196	32	7	16	2	14	24	48	53	—	—	—	2	1	—	—	8	31	12	12	9	6	—	7	1	—	—	95	2	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
April	294	35	329	9	2	11	340	228	52	12	21	—	15	23	44	61	—	—	—	3	—	—	2	6	30	22	11	10	6	—	10	2	1	1	104	4	9																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
Mai	250	42	292	12	5	17	309	168	36	10	17	—	10	28	14	53	—	—	—	1	—	—	4	1	19	12	8	11	9	1	7	3	—	—	84	4	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
Juni	276	48	324	14	3	17	341	173	32	20	10	—	12	31	27	41	—	—	—	—	1	—	2	—	32	8	4	4	2	2	6	7	—	—	96	4	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
Juli	296	39	335	7	2	9	344	172	56	24	13	3	10	12	22	32	—	—	—	2	—	—	1	1	15	5	2	8	6	—	31	28	—	—	64	4	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
August	302	43	350	8	2	10	360	291	141	40	14	6	12	14	35	29	—	—	—	—	—	2	—	18	5	2	4	5	—	77	77	—	—	90	2	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																	
September . .	282	42	324	4	—	4	328	197	69	11	19	3	14	18	26	37	—	—	—	—	—	2	1	17	6	4	2	5	—	47	14	—	—	91	1	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																	
October	276	45	321	8	1	9	330	150	43	14	12	1	10	13	21	36	—	2	—	—	—	2	1	15	4	3	3	8	—	18	4	—	—	81	3	5																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																	
November . . .	284	37	321	10	1	11	332	162	45	14	21	1	9	16	19	37	—	4	—	1	—	—	2	1	15	17	4	5	5	1	10	5	—	—	84	3	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
December . . .	259	47	306	7	3	10	316	142	27	7	26	2	8	21	17	34	—	12	—	1	—	2	1	21	17	5	4	4	—	4	—	—	—	66	1	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																	
1897	3385	525	3910	105	21	126	4036	2199	593	183	194	25	135	246	342	481	—	18	2	13	4	14	8	—	3	2	4	3	47	23	273	133	66	76	69	5	237	145	1	1	1003	28	44																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
	3910			126				18,28 pro Mille auf 1000 Einwohner berechnet	26,97	8,32	8,82	1,14	6,14	11,19	15,55	21,82	—	0,82	0,09	0,59	0,18	0,64	0,36	—	0,14	0,09	0,18	0,14	2,14	1,05	12,42	6,05	3,00	3,46	3,14	0,23	10,78	6,59	0,05	0,05	45,58	1,28	2,00																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
32,27 pro Mille zur Gesamtbevölkerung auf 1000 Einwohner berechnet																																3,12 Proc. z. Gesamtzahl der Geburten																																Procent zur Gesamtzahl der Gestorbenen																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																					
Januar	278	44	322	15	1	16	338	203	33	20	23	6	14	18	33	46	—	11	—	1	2	2	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

	Geburten						Zahl der Todesfälle ohne Totgeburten	Alter der Gestorbenen								Todesursachen																							Einwohnerzahl																		
	Lebend- geborene			Todt- geborene				Ueberhaupt	0 bis 1 Jahr		1 bis 5 Jahr		5 bis 20 Jahre	20 bis 40 Jahre	40 bis 60 Jahre	über 60 Jahre	unbekannt	Infectionskrankheiten													Andere vorherrschende Krankheiten							Alle übrigen Krank- heiten		Gewalt- samer Tod																	
	ehelich	unehelich	Summe	ehelich	unehelich	Summe			ehelich	unehelich	ehelich	unehelich						Masern und Rötheln	Scharlach	Diphtheritis	Croup	Stiekhusten	Unterleibs- typhus	Flecktyphus	Epidemische Genickstarre	Ruhr	Puerperalfieber	Syphilis	Andere Infections- krankheiten	Darunter Influenza	Lungen- schwindsucht	Lungen- entzündung	Acuter Bron- chialkatarrh	Andere Erkrankungen der Athmungs- organe	Gehirn- schlag- fluss	Acuter Gelenk- rheumatismus	Acuter Darmkatarrh			Brechdurchfall	Alkoholismus	Gewaltsamer Tod (excl. Selbstmord)	Selbstmord														
Januar	315	48	363	5	3	8	371	182	40	10	17	2	10	25	28	50	—	—	1	2	2	—	—	—	—	—	1	10	3	23	19	5	13	1	—	6	2	—	93	1	3	126 410															
Februar	285	49	334	7	2	9	343	212	48	12	28	1	12	21	28	62	—	—	1	1	4	2	1	—	—	—	1	19	16	16	15	23	14	7	—	8	—	1	93	1	3																
März	335	43	378	15	—	15	393	217	35	13	26	3	16	32	37	54	1	—	1	2	3	2	—	—	—	—	25	22	39	20	4	9	4	2	10	—	—	91	3	1																	
April	317	56	373	11	—	11	384	191	35	13	23	3	8	22	33	54	—	3	—	2	1	2	—	—	—	—	6	5	24	18	3	7	5	—	7	1	—	107	3	2																	
Mai	287	49	336	12	2	14	350	206	45	9	26	3	19	28	39	37	—	3	1	2	—	2	—	—	—	—	1	3	3	17	14	10	7	4	—	16	5	—	109	8	5																
Juni	255	30	285	4	2	6	291	161	41	9	22	1	8	16	29	35	—	3	1	2	—	2	—	—	—	—	1	3	3	27	9	5	5	5	—	36	16	—	88	8	6																
Juli	291	32	323	8	1	9	332	216	72	13	25	1	18	25	28	34	—	5	—	1	—	1	1	—	—	—	1	—	2	19	9	6	5	10	1	95	61	—	101	5	2																
August	310	36	346	6	1	7	353	327	164	34	25	3	9	20	30	42	—	2	1	2	1	3	—	—	—	—	1	2	11	10	3	9	5	—	10	65	—	149	2	4																	
September	284	57	341	7	—	7	348	245	102	24	29	5	8	18	28	31	—	1	1	1	—	1	1	—	—	—	—	3	—	22	13	10	6	5	—	14	5	—	83	3	4																
October	279	49	328	6	1	7	335	181	33	16	22	1	9	34	26	40	—	5	—	4	—	—	4	—	—	—	—	3	3	19	17	6	11	5	1	4	3	—	78	1	5																
November	247	49	296	12	—	12	308	164	39	8	21	—	10	15	37	33	1	2	—	1	—	4	—	—	—	—	—	6	4	26	14	16	7	5	—	6	3	—	102	6	3																
December	286	48	334	7	1	8	342	200	54	13	12	1	6	23	30	61	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	88	63	272	174	101	98	60	5	220	132	1	1164	45	40																
1899	3491	546	4037	100	13	113	4150	2502	708	174	276	24	133	279	373	533	2	25	6	23	11	19	12	—	—	—	5	1	88	63	272	174	101	98	60	5	220	132	1	1164	45	40															
	4037			113				19,79 pro Mille auf 1000 Einwohner berechnet	27,90	6,95	11,03	0,96	5,32	11,15	14,90	21,70	0,08	1,00	0,24	0,92	0,44	0,76	0,48	—	—	—	0,20	0,04	3,52	2,52	10,87	6,95	4,04	3,92	2,04	0,20	8,79	5,28	0,04	46,87	1,80	1,60															
32,00 pro Mille zur Gesamt- bevölkerung auf 1000 Ein- wohner be- rechnet																																2,72 Proc. z. Gesamt- zahl der Geburten			Procent zur Gesamtzahl der Gestorbenen																						

Procent zur Gesamtzahl der Gestorbenen

Organ, die Monatsschrift für öffentliche Gesundheitspflege, seit 1878 zusammengestellt und veröffentlicht. Der letzte zusammenfassende Bericht für die Jahre 1893 und 1894 ist erschienen in Nr. 5 des Monatsblattes vom Jahre 1896.

Die Bevölkerungsziffer zeigt von 1895 bis 1899 eine durchaus normale Zunahme, sie steigt von 115 138 (im Jahre 1895) auf 117 956 (1896), 120 774 (1897), 123 592 (1898), 126 410 (1899).

Die Zahl der Lebendgeborenen betrug 1895 = 3835 (= 33,31 pro Mille zur Gesamtbevölkerung auf 1000 Einwohner berechnet),

1896 = 4060 (= 34,42 pro Mille),

1897 = 3910 (= 32,27 „ „)

1898 = 4026 (= 32,59 „ „)

1899 = 4037 (= 32,00 „ „).

Wenn also auch geringe Schwankungen vorhanden sind, so zeigt Braunschweig doch im Ganzen in den fünf Jahren eine durchaus normale Zunahme durch Geburten.

Die Procentzahl der Todtgeburten zur Gesamtzahl der Geburten betrug 1895 = 111 = 2,81 Procent zur Gesamtzahl der Geburten,

1896 = 138 = 3,29 Proc.,

1897 = 126 = 3,12 „

1898 = 114 = 2,75 „

1899 = 113 = 2,72 „

dieselbe hält sich also innerhalb der normalen Grenze von drei bis vier und entspricht dem früher von mir für die Jahre 1879 bis 1896 in der Festschrift: Braunschweig im Jahre 1897, S. 170 und 171, veröffentlichten Zahlen (geringste 2,68 im Jahre 1882, höchste 3,87 im Jahre 1887).

Der Verlust an Menschenmaterial spricht sich, abgesehen von dem fluctuirenden Zu- und Abfluss der wandernden Bevölkerung, den wir hier nicht berücksichtigen wollen, in der Anzahl der Todesfälle (ohne Todtgeburten) aus. Um einen objectiven Vergleich zu haben, berechnet man die Anzahl der Todesfälle auf 1000 Einwohner und das Jahr und nennt dies die Sterblichkeitsziffer. Es starben:

	Zahl der Todesfälle (ohne Todtgeburten)	Sterblichkeitsziffer
1895 . . .	2469	21,44 pro Mille,
1896 . . .	2150	18,23 " "
1897 . . .	2199	18,28 " "
1898 . . .	2207	17,86 " "
1899 . . .	2502	19,79 " "

Die durchschnittliche Sterblichkeitsziffer für die fünf Jahre würde also 19,12 pro Mille betragen. Dies zeigt wiederum eine erfreuliche Verbesserung des Gesundheitszustandes an im Ver-
gleiche zu früheren Jahren; so betrug die Sterblichkeitsziffer:

1890 bis 1894	=	22,24 pro Mille,
1885 " 1889	=	22,77 " "
1880 " 1884	=	25,62 " "
1879	=	28,45 " "
1814	=	52,22 " "
1758	=	65,60 " "

In anderthalb Jahrhunderten ist die Sterblichkeitsziffer um 43, also um zwei Drittel, und gegen die vorletzten fünf Jahre (1890 bis 1894) noch um drei zurückgegangen.

Dem Alter nach sind an der Sterblichkeit immer am meisten betheilt die ersten Lebensjahre, es starben im Alter von

0 bis 1 Jahr:

1895 . . .	875 (= 35,44 Proc. sämtlicher Verstorbenen),
1896 . . .	724 (= 33,67 " " ")
1897 . . .	776 (= 35,29 " " ")
1898 . . .	826 (= 37,42 " " ")
1899 . . .	882 (= 34,85 " " ")

1 bis 5 Jahr:

1895 . . .	302 (= 12,23 Proc. sämtlicher Verstorbenen),
1896 . . .	222 (= 10,33 " " ")
1897 . . .	219 (= 9,96 " " ")
1898 . . .	220 (= 9,97 " " ")
1899 . . .	310 (= 11,99 " " ")

Wie in früheren Jahren kommt über ein Drittel (35,33 Proc.) sämtlicher Verstorbenen auf das erste Lebensjahr, und über ein

Zehntel (10,89 Proc.) auf die vier folgenden Jahre, fast die Hälfte sämtlicher Verstorbenen (46,22 Proc.) auf Kinder unter fünf Jahren. Es ist das immer noch ein sehr hoher Procentsatz, und es bedarf der ernstesten Erwägungen, wie dieser hohen Kindersterblichkeit abzuhelpen sei.

Die übrigen Altersclassen zeigen folgende Sterblichkeitsziffern:

	5 bis 20 Jahr		20 bis 40 Jahr		40 bis 60 Jahr		über 60 Jahr	
	Anzahl	Proc.	Anzahl	Proc.	Anzahl	Proc.	Anzahl	Proc.
1895 . .	129	5,22	259	10,49	369	14,95	535	21,67
1896 . .	120	5,58	267	12,42	368	17,12	446	20,74
1897 . .	135	6,14	246	11,19	342	15,55	481	21,87
1898 . .	121	5,48	218	9,88	333	15,09	488	22,11
1899 . .	133	5,32	279	11,15	373	14,90	533	21,70

Ein Alter über 60 Jahr erreichten 21,60 Proc., von 40 bis 60 Jahren starben 15,52 Proc., von 20 bis 40 Jahren 11,03 Proc., von 5 bis 20 Jahren 5,55 Proc. sämtlicher Verstorbenen. Interessant ist es, dass die Sterblichkeit gerade in dem Alter über 60 Jahr in den letzten Jahrzehnten zugenommen hat, dass also die Menschen in der Stadt Braunschweig jetzt gegen frühere Jahrzehnte ein höheres Alter erreichen. Es starben nämlich in den Jahren:

1890 bis 1894	nur 20,65 Proc.,
1885 „ 1889	„ 19,45 „
1880 „ 1884	„ 18,43 „

sämtlicher Verstorbenen im Alter über 60 Jahr. Die Lebensbedingungen für diejenigen, die die ersten Lebensjahre glücklich überwunden haben, müssen daher günstiger geworden sein in der Stadt Braunschweig.

Eine grosse Reihe von Krankheiten der verschiedensten Organe des Körpers können zum Tode führen. Die Hygiene ist bemüht, die Verhütung einer Reihe von Krankheiten herbeizuführen und namentlich die sogenannten Krankheitserreger, Mikroorganismen, die die betreffende Krankheit hervorrufen, zu bekämpfen. Von besonderer Wichtigkeit sind daher für die Beurtheilung des Gesundheitszustandes der Stadt Braunschweig die sogenannten Infectionskrankheiten und einige andere in den Tabellen aufgeführte vorherrschende Krankheiten, die wir nun

in Betreff ihres Vorkommens und Beitrages zur Mortalität näher betrachten wollen.

Masern und Rötheln (Krankheitserreger wohl mit Sicherheit vorhanden, aber nicht bekannt) herrschten 1875 bis zum September, 1897/98 im Winter von October bis März und 1899 von April an bis Ende des Jahres. Die Sterblichkeit war namentlich 1895 eine verhältnissmässig hohe, 50 Todesfälle = 2,03 Proc. sämmtlicher Verstorbenen kamen zur Anmeldung, 1897 nur 0,82, 1898 = 0,77 und 1899 = 1 Proc. sämmtlicher Todesfälle. Im Ganzen treten die Masern hier, wo fast alle paar Jahre eine grössere Epidemie herrscht, ziemlich milde auf.

Scharlach (Krankheitserreger wohl mit Sicherheit vorhanden, aber nicht bekannt) ist vereinzelt in dem ganzen Zeitraume von fünf Jahren in fast jedem Monate vorgekommen, 1895 = 13 Todesfälle (= 0,53 Proc.), 1896 = 14 (= 0,65 Proc.), 1897 = 2 (= 0,29 Proc.), 1898 = 2 (= 0,05 Proc.), 1899 = 6 (= 0,29 Proc.). Dies entspricht ungefähr derselben Sterblichkeit, wie sie in den letzten beiden Jahrzehnten hier an Scharlach regelmässig beobachtet wurde. 1879 hatten wir die letzte grosse Scharlachepidemie hierselbst mit 82 Todesfällen = 3,14 Proc. sämmtlicher Verstorbenen, seit der Zeit ist die Sterblichkeit nie wieder über 1 Proc. hinausgegangen.

Diphtheritis (Krankheitserreger: *Corynebacterium diphtheriae*, Löffler) kam in jedem Monate vor. Tödtlicher Ausgang wurde beobachtet 13 mal (= 0,53 Proc.) in 1895, 21 mal (= 0,98 Proc.) in 1896, 13 mal (= 0,59 Proc.) in 1897, 17 mal (= 0,77 Proc.) in 1898 und 23 mal (= 0,92 Proc.) in 1899. — Diese verhältnissmässig geringen Verluste an Diphtheritis sind wohl hauptsächlich der seit 1894 üblichen Behandlung mit dem von Behring entdeckten Heilserum, einer der grössten neueren Errungenschaften der Bacteriologie und Hygiene, zuzuschreiben.

Die Zahlen sprechen für sich, es starben in Braunschweig an Diphtheritis und Croup (der in der Regel wohl auch auf diphtheritische Ansteckung zurückzuführen ist):

1885	=	66	=	3,29 Proc.,
1886	=	76	=	3,79 "
1887	=	80	=	4,50 "
1888	=	170	=	7,99 "

1889 = 279 = 12,61 Proc.,	
1890 = 198 = 8,22 „	
1891 = 86 = 4,00 „	
1892 = 96 = 3,82 „	
1893 = 109 = 4,53 „	
1894 = 97 = 4,33 Proc.	NB. Beginn der Serumbehandlung.
1895 = 39 = 1,58 Proc.	
1896 = 30 = 1,40 „	
1897 = 17 = 0,77 „	
1898 = 26 = 1,18 „	
1899 = 34 = 1,36 „	

Wenn wir von dem Jahre 1894, in dem die Diphtherie-Serumbehandlung eingeführt wurde, absehen, so starben in den neun Jahren vorher durchschnittlich 5,86 Proc., in den fünf Jahren nachher durchschnittlich 1,26 Proc. aller Verstorbenen, also ist die Zahl der an Diphtheritis Verstorbenen nach Einführung der Serumbehandlung auf ungefähr ein Fünftel hinuntergegangen.

Der Stickhusten [Krankheitserreger: *Bacterium tussis convulsivae*, Czaplewski und Hensel (?)] erfordert jahraus, Jahrein seine Opfer und herrschte eigentlich fortdauernd in der Stadt. Die stärkste Ausbreitung hatte er im Jahre 1896, wo 39 (= 1,81 Proc.) Todesfälle beobachtet wurden, in den übrigen Jahren schwankte die Zahl der Todesfälle zwischen 0,45 und 0,76 Proc. sämtlicher Verstorbenen. In den früheren Jahrzehnten sind ähnliche Sterblichkeitsziffern hier beobachtet.

Der Unterleibstypus (Krankheitserreger: *Bacterium typhi*, Eberth. Gaffky) ist nur noch eine sehr selten, vereinzelt hier vorkommende, meistens von auswärts eingeschleppte Krankheit. Die Sterblichkeit betrug nur 0,36 bis 0,48 Proc. der sämtlichen Verstorbenen. Durch die neueren hygienischen Einrichtungen der Stadt, namentlich die Canalisation und Wasserversorgung, ist der Typhus hier fast ganz verschwunden.

Von Flecktyphus [Krankheitserreger: *Micrococcus exanthematicus*, Lewascheff (?)] sind nur im Jahre 1896 zwei vereinzelte tödtliche Ausgänge von aussen eingeschleppter Krankheiten beobachtet, die übrigen Jahre waren ganz frei davon.

Rückfalltyphus (Krankheitserreger: Spirochaete Obermeieri, F. Cohn), zuletzt 1879 und 1880 hier vorgekommen, wurde nicht beobachtet.

Kopfgienickstarre (Krankheitserreger: Streptococcus intracellularis, Weichselbaum) wurde nur sehr vereinzelt (0,05 bis 0,24 Proc. sämtlicher Verstorbenen) 1895, 1896 und 1897 angemeldet.

Ruhr (Krankheitserreger: Bacterium coli, var. dysentericum, Celli) ist eine sehr seltene Krankheit hier geworden, 1895 und 1899 führte sie gar nicht zum Tode, in den übrigen Jahren nur in 0,05 bis 0,18 Proc. sämtlicher Verstorbenen.

Kindbettfieber (Krankheitserreger: Streptococcus pyogenes, Rosenbach) ist nur in sehr mässiger Ausdehnung in allen Berichts Jahren vorgekommen, 1895 = 4 mal (= 0,16 Proc.), 1896 = 7 mal (= 0,33 Proc.), 1897 = 4 mal (= 0,18 Proc.), 1898 = 3 mal (= 0,14 Proc.), 1899 = 5 mal (= 0,20 Proc.) tödtlich verlaufend.

Die Syphilis (Krankheitserreger bisher unbekannt) erfordert regelmässig, namentlich angeboren bei kleinen Kindern, ihre Opfer, schwankend zwischen 0,04 Proc. (1899) und 0,45 Proc. (1895) der Verstorbenen.

Influenza (Krankheitserreger: Bacterium influenzae, R. Pfeiffer) hat uns seit der grossen Epidemie 1889/90 nicht wieder verlassen und zeigt sogar in dem letzten Jahre 1899 wieder ein ziemlich bedeutendes Ansteigen. Es wurden angemeldet:

1895 = 53 Todesfälle = 2,15 Proc. sämtlicher Verstorbenen,			
1896 = 17	"	= 0,79	" " "
1897 = 23	"	= 1,05	" " "
1898 = 24	"	= 1,09	" " "
1899 = 63	"	= 2,52	" " "

Die Lungenschwindsucht (Krankheitserreger: Mycobacterium tuberculosis, R. Koch) ist wie bisher immer die wichtigste und gefährlichste aller Infektionskrankheiten. Es starben daran:

1895 = 285 = 11,54 Proc. sämtlicher Verstorbenen,		
1896 = 281 = 13,06	"	" "
1897 = 273 = 12,42	"	" "

1898 = 259 = 11,74 Proc. sämtlicher Verstorbenen,
1899 = 272 = 10,87 „ „ „
durchschnittlich also pro Jahr 274 = 11,93 Proc.

Vergleicht man dies mit der Tuberculosesterblichkeit in den beiden vorletzten Quinquennien, so starben:

1890 bis 1894 = 307 = 13,23 Proc.,
1885 „ 1889 = 303 = 14,93 „
1880 „ 1884 = 301 = 15,28 „.

Aus diesen Zahlen ist ersichtlich, dass die Sterblichkeit an Lungenschwindsucht, dieser verheerendsten aller Volkskrankheiten, in unserer Stadt langsam aber sichtlich abgenommen hat, in den vier Zeiträumen von je fünf Jahren ist sie von 15,28 Proc. auf 11,93 Proc. hinuntergegangen.

An Lungenentzündung starben in den fünf Berichtsjahren:
durchschnittlich jährlich 151 oder 6,55 Proc.,
an acuter Bronchitis 85 „ 3,53 „
an anderen Lungenkrankheiten . . . 89 „ 3,87 „
im Ganzen also an Lungenkrankheiten 325 „ 13,93 „.

Gehirnschlagfluss veranlasste für das Jahr durchschnittlich 69 Todesfälle oder 2,93 Proc., acuter Gelenkrheumatismus 5 oder 0,20 Proc. sämtlicher Verstorbenen.

Von besonderer hygienischer Bedeutung sind die Durchfälle und Brechdurchfälle, die namentlich in dem kindlichen Alter eine hohe Sterblichkeit bedingen. Es starben daran:

1895 = 378 = 15,23 Proc.,
1896 = 225 = 10,46 „
1897 = 382 = 17,37 „
1898 = 352 = 15,95 „
1899 = 352 = 14,07 „ also durchschnittlich

jährlich 358 = 14,62 Proc.

sämtlicher Verstorbenen.

Vergleichen wir mit früheren Quinquennien, so starben

1890 bis 1894 = 322 = 13,72 Proc.,
1885 „ 1889 = 245 = 13,03 „
1880 „ 1884 = 218 = 11,01 „

sämtlicher Verstorbenen.

Diese Zahlen geben zu den ernstesten Bedenken Anlass. Seit langer Zeit ist man von den verschiedensten Seiten her bemüht, zur Bekämpfung der Säuglingssterblichkeit die nöthigen Mittel zu ergreifen, in erster Linie eine passendere Kindermilch als Ersatz der Muttermilch zu bieten. Jahrzehntelang besteht die unter Controle des ärztlichen Vereins befindliche Kindermilchstation, früher Kreuzkloster, jetzt Fr. Dreves, die ungekochte Milch liefert, die von Kühen, welche mit Tuberculin geimpft sind und einer bestimmten Trockenfütterung unterworfen werden, producirt wird, ferner findet der Verkauf sterilisirter, von Prof. Dr. R. Blasius und Dr. Frerichs (früher Prof. Dr. Beckurts) controlirter Kuhmilch und Gärtner'scher Fettmilch seitens der Braunschweiger Molkerei, E. G., statt, endlich ist vor wenigen Wochen eine neue Kindermilchstation unter Controle des Vereins für öffentliche Gesundheitspflege im v. Pawel'schen Holze von dem Landwirth Wolter gegründet, die ähnliche Kindermilch wie die Kindermilchstation von Fr. Dreves producirt. Es ist also in ausgiebigster Weise für Lieferung einer guten Kindermilch gesorgt. Wie ich in einer Arbeit über „Die Säuglingssterblichkeit nach der Wohlhabenheit der Eltern in Braunschweig, 1890 bis 1899“ im Monatsblatt für öffentliche Gesundheitspflege, 1900, S. 137 u. f., nachgewiesen habe, „starben von Kindern unter einem Jahr an acuten Magendarmkrankheiten:

	Reiche I	Mittelstand II	Arme III	Nothdürftige IV
1890 bis 1894	1,1 Proc.	7,6 Proc.	41,0 Proc.	51,3 Proc.,
1896 „ 1899	0,2 „	9,6 „	38,5 „	51,7 „ .

Bei den Reichen kommen mit anderen Worten fast gar keine Todesfälle der Säuglinge an Durchfällen und Brechdurchfällen vor, beim Mittelstand finden wir 8 Proc. sämmtlicher derartigen Todesfälle, während alles Uebrige auf die armen und nothdürftigen Familien kommt; zwei Fünftel der gesammten Todesfälle auf die Armen und ferner über die Hälfte auf die Nothdürftigen“.

Wenn man bedenkt, dass, wie aus den oben angeführten Zahlen hervorgeht, in dem Zeitraum von 1880 bis 1884 im Ganzen 2,71 Proc. weniger an Durchfällen und Brechdurchfällen

gestorben sind als in dem Zeitraume von 1890 bis 1894, wenn man berücksichtigt, dass fast neun Zehntel der im Zeitraume 1895 bis 1899 verstorbenen Säuglinge der Classe der Armen und Nothdürftigen angehört, so liegt der Schluss nahe, dass die hier in Braunschweig producirte Kindermilch zu theuer für die ärmeren Volksclassen ist, und der Wunsch ist berechtigt, dass ausser anderen hygienischen Verbesserungen, z. B. der kleineren Wohnungen, durch öffentliche und private Wohlthätigkeit Mittel und Wege gefunden werden, den breiten Volksmassen zur Ernährung der Kinder, wo der Genuss der Muttermilch nicht ausführbar ist, gute Kindermilch, womöglich sterilisirte Kuhmilch zu billigeren Preisen zu verschaffen.

Die Todesfälle an Säuferwahnsinn (Alkoholismus) haben sich in sehr bescheidenen Grenzen gehalten und gegen frühere Jahre abgenommen. Es starben daran:

1895	= 2	= 0,08 Proc.,
1896	= 4	= 0,19 „
1897	= 1	= 0,05 „
1898	= 3	= 0,14 „
1899	= 1	= 0,04 „

durchschnittlich im Jahre $2,2 = 0,10$ Proc.; es starben daran:

1890 bis 1894	jährlich 4	= 0,17 Proc.,
1885 „ 1889	„ 2,4	= 0,12 „
1880 „ 1884	„ 3,2	= 0,16 „

Unglücksfälle führten durchschnittlich in jedem Jahre 37 mal (= 1,41 Proc.) zum Tode; in den Jahren 1890 bis 1894 35 mal (= 1,48 Proc.), in den Jahren 1885 bis 1889 28 mal (= 1,38 Proc.), in den Jahren 1880 bis 1884 24 mal (= 1,25 Proc.), es zeigt sich also im Grossen und Ganzen eine langsame Steigerung der tödtlich verlaufenden Unglücksfälle.

Selbstmorde kommen durchschnittlich jährlich 44 (= 1,90 Proc.) vor. Frühere Zeitperioden zeigten folgende Zahlen:

1890 bis 1894	durchschnittlich 40	= 1,73 Proc.,
1885 „ 1889	„ 32	= 1,59 „
1880 „ 1884	„ 34	= 1,71 „

es ist also auch bei den Selbstmorden eine langsame Steigerung zu beobachten.

Trichinose führte nur einmal im Jahre 1897 zum Tode, epidemische Erkrankungen kamen nicht zur Anmeldung.

Am Ende unseres hygienisch-kritischen Berichtes ist es wohl angezeigt, aus den mitgetheilten Zahlen eine kurze Bilanz zu ziehen und Betrachtungen für die Zukunft zu machen.

Die Bevölkerungszunahme der Stadt ist eine durchaus normale gewesen, immer mehr ist die Sterblichkeitsziffer hinuntergegangen, die Lebensdauer der einzelnen Bewohner ist verlängert worden. Dies verdanken wir gewiss 1. den hygienischen Einrichtungen, welche die Stadt getroffen hat, namentlich der Canalisation und Abführung der städtischen Schmutzwässer, der Reinhaltung unserer Oker und der Versorgung mit gesundem Wasser, 2. der besseren Behandlung der Infectiouskrankheiten. Der Unterleibstypus ist fast verschwunden, Flecktyphus und Rückfalltyphus sind gar nicht oder nur sporadisch vorgekommen, Masern und Scharlach sind milde verlaufen, das Kindbettfieber und die Ruhr sind immer seltener vorgekommen, die Diphtheritis hat an Häufigkeit der Erkrankungen abgenommen und einen viel mildereren, günstigeren Verlauf genommen, selbst die wichtigste aller Volkskrankheiten, die Lungenschwindsucht, hat langsam abgenommen. Eine langsame Zunahme haben die Unglücksfälle und Selbstmorde gezeigt und ein allmähliches Anwachsen der Todesfälle an Brechdurchfällen und Durchfällen der Kinder ist beobachtet.

Für die Zukunft ist es angezeigt, auf dem bisherigen Wege fortzuschreiten, die hygienischen Einrichtungen der Stadt zu vervollkommen, die Lungenschwindsucht noch energischer zu bekämpfen durch weitere Ausdehnung der Freiluftbehandlung in den Lungenheilstätten, Einrichtung eigener Schwindsuchtshospitäler und Einführung der Anzeigepflicht der Aerzte für Tuberculose-Erkrankungen, und endlich den Magen-Darmkrankheiten des Säuglingsalters entgegenzutreten durch Darbietung einer billigen Kindermilch, populäre Belehrung der Mütter über rationelle Kinderpflege und Schaffung genügender, gesunder billiger Wohnungen mit Luft, Licht und Ventilation für die unbemittelten Volksklassen.

VORGESCHICHTLICHE DENKMÄLER
ZWISCHEN
HELMSTEDT, HARBKE UND MARIENBORN.

VON
WILHELM BLASIUS.

(MIT EINER TAFEL.)

Die Lübbensteine, auf dem Cornelius- oder St. Annen-Berge westlich dicht vor den Thoren von Helmstedt gelegen, sind schon seit vielen Jahrhunderten als ein wichtiges Denkmal der vorgeschichtlichen Zeit bekannt. In der Literatur der Alterthumswissenschaft wurden sie oft erwähnt und eingehend besprochen, was sich wohl durch ihre hervorragend in die Augen fallende Lage und durch die Nähe der ehemaligen Universität Helmstedt erklären mag, deren Professoren gewissermaassen es als ihre Pflicht betrachten mussten, sich selbst und Anderen über die Bedeutung dieses Denkmals der Vorzeit Rechenschaft zu geben. In neuester Zeit hat Fritz Grabowsky¹⁾ eine gründliche Arbeit über die Lübbensteine verfasst und dabei ihre Literatur eingehend berücksichtigt. Die allgemeine Meinung der Gelehrten geht jetzt wohl dahin, dass die Lübbensteine als zwei mehr oder weniger gut erhaltene megalithische Grabdenkmäler der neolithischen Periode aufzufassen sind. Die Ansicht, dass es sich um alleinige Opferstätten handelte, fand bis über die Mitte des vorigen Jahrhunderts hinaus noch manche Anhänger, dürfte aber jetzt allseitig aufgegeben sein. Wohl aber ist es nicht unmöglich, dass die Steingruppen in späterer Zeit als Opferstätten benutzt sind, besonders die südliche, am wenigsten gut erhaltene, eine Meinung, der besonders lebhaft der kürzlich verstorbene Alterthumsforscher Gustav Maass in Altenhausen huldigte²⁾. Auch an anderen vorgeschichtlichen Funden ist die Umgegend von Helmstedt reich, womit sich z. B. vor mehr als 70 Jahren eingehend Wilh. J. L.

¹⁾ Die Lübbensteine bei Helmstedt. Mit 3 Abbildungen (im Text). Beiträge zur Anthropologie Braunschweigs. Festschrift. Braunschweig, Fr. Vieweg u. Sohn, 1898, S. 39 bis 58. Auch S.-A. 8°. — ²⁾ Sitzungsber. des Aller-Vereins vom 12. August 1891 in dem Neuhaldenslebener bezw. Calvörder Wochenblatte Nr. 104 vom 5. September 1891. Beil.

Bode¹⁾ beschäftigt hat. Nicht weit von Helmstedt, nach Südwesten zu, liegt der Elm, dessen Alterthümer von demselben Gelehrten einige Jahrzehnte später ausführlich beschrieben sind²⁾. Das Elmgebirge ist, wie ich bei dieser Gelegenheit ausdrücklich hervorheben möchte, diejenige für die braunschweigische Alterthumsforschung historisch wichtige Stätte, an welcher vorgeschichtliche Ausgrabungen zuerst auf braunschweigischem Gebiete planmässig ausgeführt wurden, und zwar von Joh. Chr. Dünnhaupt in Lelm, hauptsächlich an zahlreichen hier vereinigt liegenden Kegelgräbern in den sechziger Jahren des 18. Jahrhunderts, worüber er bis 1778 verschiedene Schriften veröffentlicht hat³⁾. Andere Stellen des Elmwaldes bieten noch jetzt mancherlei verschiedene vorgeschichtliche Denkmäler, von denen ich nur die Erdwohnungen bei Langeleben, das grosse Steinkistengrab auf dem Adamshai am sogen. Evesser Berge und zahlreiche vorgeschichtliche Befestigungen, hauptsächlich im Reitlingthale, hervorheben will. Auch auf dem nördlich vom Elm, südwestlich von Helmstedt, befindlichen Elzgebirge sind noch einige Kegelgräber zu finden. Bei Schöningen, Alversdorf, Hohnsleben, Büddenstedt im Süden und bei Emmerstedt, Süplingenburg, Gr. Steinum, Königslutter, Lauingen u. s. w. im Westen von Helmstedt sind gleichfalls viele vorgeschichtliche Begräbnissplätze, Urnenfelder und dergleichen aufgedeckt und viele neolithische Steingeräthe gefunden. Meine bisherigen Darlegungen sollen nur daran erinnern und vor Augen führen, dass das ganze Gebiet westlich und südwestlich von der Gegend, die im Folgenden zu behandeln ich mir vor-

¹⁾ Nachweisung über einige im Herzogthume Braunschweig in der Gegend von Helmstedt gemachte antiquarische Entdeckungen (Krusse's Deutsche Alterthümer, Bd. III, Heft 1 und 2, 1828, S. 115 ff. mit Taf. II). —

²⁾ Der Elm mit seiner Umgebung und seinen Denkmälern der Vorzeit. Mit 1 Karte. Braunschweig, Friedr. Vieweg u. Sohn, 1846. 8°. — ³⁾ Nachricht von einigen Alterthümern in der Gegend von Lelm (Gelehrte Beytr. z. d. Braunschweigischen Anzeigen 1768, St. 60 und 61 vom 3. August und 6. August, Sp. 473 bis 480 und 481 bis 486). — Abhandlung von den Wohnungen der alten Deutschen im Elmwalde ohnweit Langeleben (Allgemeine Unterhaltungen, Göttingen 1770, Nr. 18 bis 20, S. 142 bis 155; neu bearbeitet in desselben Verfassers „Beyträgen“ 1778, S. 53 bis 100). — Der ehemalige Götzenhayn im Elmwalde (Gelehrte Beyträge z. d. Braunschweigischen Anzeigen 1777, St. 60 und 61 vom 2. August und 6. August, Sp. 497 bis 512). — Beyträge zur Deutschen Niedersächsischen Geschichte und deren Alterthümern. Helmstedt 1778. 8°. Mit 1 Kupfertafel.

genommen habe, reich an vorgeschichtlichen Alterthümern der verschiedensten Art ist. — Ebenso reich ist ehemals die Gegend unmittelbar südlich und südöstlich von Harbke an vorgeschichtlichen Funden gewesen; und die Wissenschaft kann sich glücklich schätzen, dass um die Mitte des 18. Jahrhunderts der Hofrichter und Berghauptmann Friedrich August v. Veltheim hier lebte und wirkte, der auf mehr als einem Gebiete wissenschaftliche Bestrebungen zu fördern sich befeissigte. Ich erinnere an dieser Stelle nur an die für die damalige Zeit grossartigen Parkanlagen, die noch jetzt sehenswerth sind und damals den botanischen Leiter derselben, Joh. Phil. du Roi, veranlassten, sein classisches Werk über „die Harbke'sche wilde Baumzucht“, hauptsächlich über die dort neu eingeführten amerikanischen Holzarten, zu veröffentlichen (1771 und 1772). In ähnlicher Weise hatte v. Veltheim bereitwilligst die Alterthumsforschungen seines ehemaligen Hauslehrers Christ. Ludew. Schäffer unterstützt, der über die vorgeschichtlichen Funde bei Harbke, hauptsächlich über die Kegelgräber auf dem Timiansberge südlich von Harbke und auf dem von ihm 1758 durchforschten Blauen Berge südöstlich von Harbke, sowie über die dort vorgenommenen Ausgrabungen ausführliche Abhandlungen veröffentlicht hat¹⁾, denen Abbildungen von den Grundrissen einiger mit Steinen besetzter Kegelgräber (auf Tafel I), von einigen in denselben gefundenen Urnen (auf Tafel II) und von einigen Bronzegeräthen und einem goldenen Ringe, die sich in und bei diesen Urnen gefunden hatten (auf Tafel III der späteren zusammenfassenden Schrift von 1764) beigegeben sind. Leider scheinen sich bis jetzt von diesen Kegelgräbern nur noch einige auf dem Blauen Berge, gar keine auf dem Timiansberge erhalten zu haben; um so wichtiger sind daher die ausführlichen Beschreibungen und Abbildungen, welche Christian Ludewig Schäffer von denselben gegeben hat. Auch die Gegend östlich und nordöstlich von Marienborn, dem östlichen Grenzzorte unseres Gebietes, ist reich an vorgeschichtlichen Denk-

¹⁾ Von einigen bei Harbke ohnweit Helmstedt entdeckten teutschen Alterthümern (Hannov. Beytr. z. Nutz. und Vergn. Bd. II, 1760, St. 40 vom 19. Mai, Sp. 625 bis 638). — Beyträge zur Vermehrung der Känntniss der Teutschen Alterthümer. Quedlinburg und Leipzig, Andreas Franz Biesterfeld, 1764. 8°. Mit 3 Kupfertafeln.

mälern. Verfolgt man von Kl. Bartensleben aus den wenig befestigten Communicationsweg, welcher nach Osten auf die Erxlebensche Forst zuführt und diese in der Richtung nach Bregenstedt zu durchschneidet, so erreicht man gleich beim Eintritt in den Wald eine Stelle, an welcher 25 Kegelgräber sich vereinigt finden, über die Otto Zeiseweis wiederholt in den Sitzungen des Aller-Vereins berichtet hat¹⁾. Auf der linken (nördlichen) Seite des Weges liegen etwa doppelt so viele Grabhügel als auf der anderen; der Weg führt mitten hindurch und hat einige Hügel direct angeschnitten. Vor dem Holze liegen auf freiem Felde zwei Kegelgräber, die von Zeiseweis geöffnet sind und ihrem Inhalte nach offenbar der Bronzeperiode angehören. Ein anderer ähnlicher Hügel im Forstort Olbkewinkel der Veltheim-Bartensleben'schen Forst, westlich von dem Fusswege, der von Kl. Bartensleben nach Eschenrode führt, etwa 10 Minuten vom ersten Orte entfernt, zeigte sich mit einem Kranze von acht hochkant stehenden Steinen besetzt und wurde später von ihm in Uebereinstimmung mit Gustav Maass (Altenhausen) als Opferstätte gedeutet. Schreitet man weiter auf dem Wege nach Bregenstedt, so trifft man an der Stelle, wo von links (Nordosten) her schräg der Weg von Ivenrode die Strasse im Walde durchschneidet, links wenige Schritte von derselben entfernt, ein sagenreiches Denkmal der Vorgeschichte, die sogen. „Heidenkrippe“, eine Gruppe von zum Theil merkwürdig gestalteten Steinen, die vielfach als eine alte Opferstätte aufgefasst worden ist²⁾. Oestlich von Bregenstedt gelangen wir bald in das bis Neuholdensleben sich hinziehende interessante Gebiet, in welchem sich augenblicklich wohl noch im Vergleich zu anderen Gebieten Deutschlands am zahlreichsten und in dichtester Gruppierung die der

¹⁾ Sitzungsber. des Aller-Vereins vom 25. September 1889 und 6. November 1889 im Neuholdenslebener bzw. Calvörder Wochenblatte, Nr. 118 und 149 vom 10. October 1889, Beil. und vom 21. December 1889, Beilage 2; u. Sitz. vom 28. December 1889, ebend. Nr. 25 vom 1. März 1890, Beil. — ²⁾ Behrends, Peter Wilhelm, Neuholdenslebische Kreis-Chronik. Theil II: Chronik des Landkreises Neuholdensleben, 1826; II. Ausgabe 1832; S. 463. — Neue Aufl. des II. Theiles von Bernhard Rudolf Behrends unter dem Titel: Chronik des Kreises Neuholdensleben, in 2 Bänden, ebenda, 1890 und 1891. — Maass I, Gustav, Ueber die sogen. „Heidenkrippe“ im Walde nördlich von Eimersleben (Sitzungsber. d. Aller-Vereins vom 30. December 1878 im Neuholdenslebener bzw. Calvörder Wochenblatt, Nr. 32 vom 12. April 1879, Beil. 2).

neolithischen Periode angehörenden megalithischen Grabdenkmäler erhalten haben, vermischt mit sehr vielen einzelnen Kegelgräbern der Bronzeperiode, die an einigen Stellen, wie z. B. in der Freiherrlich von Schenk'schen Forst bei Alvensleben und Dönstedt sich zu mehr oder weniger grossen Friedhöfen von Kegelgräbern vereinigen. — Hiermit will ich die einleitenden Worte über die vorgeschichtliche Bedeutung der Nachbargebiete beendigen, zwischen welchen sich die Gegend ausbreitet, deren vorgeschichtliche Alterthümer ich jetzt eingehender zu beschreiben habe.

Die Gegend zwischen Helmstedt, Harbke und Marienborn ist reich an prächtigen Wäldern der verschiedensten Art; sie bedecken hier die südlichen Ausläufer des mit dem Namen „Lappwald“ bezeichneten, meist bewaldeten Höhenzuges. Hohe Buchenwälder wechseln mit Eichenhainen, Fichten- und Kiefernwäldern ab. Hochwälder in den verschiedensten Altersstufen, Niederwald und kaum durchdringbare Dickichte gemischten Waldes folgen auf einander. Die Gegend ist oft von grosser landschaftlicher Schönheit. Ganz besonders gilt dies für das östlich von Helmstedt gelegene, ostwärts direct zur Aller, einem Nebenflusse der Weser, sich senkende, von einem klaren Gebirgsbache durchflossene sogen. Brunnenthal, in dem das Kurhaus und die Villen von Bad Helmstedt liegen, und durch welches die Heerstrasse nach Behndorf und Gross-Bartensleben führt. Die Gewässer, welche sich westlich vom Brunnenthale sammeln und die Stadt Helmstedt selbst mit Wasser versorgen, gehören dem Flussgebiete der Schunter an, eines Nebenflusses der Oker, die sich auch in die Aller ergiesst. An vorgeschichtlichen Funden ist das Brunnenthal und die Gegend zwischen demselben und Helmstedt nicht reich, und Denkmäler des Alterthums scheinen hier vollständig zu fehlen, wenn man von der Burganlage auf dem sogen. Burgberge über Bad Helmstedt absieht, deren Anfänge wohl der geschichtlichen Zeit angehören und vielleicht bis zur Zeit der sächsisch-wendischen Kriege zurückgehen dürften. Wirkliche Denkmäler der vorgeschichtlichen Zeit sind nur südlich vom Gebiete des Brunnenthales bekannt geworden und scheinen sich auch allein südlich von der Eisenbahn zu finden, die Helmstedt mit Marienborn verbindet. Doch können vielleicht noch genauere Ortsuntersuchungen in den Wäldern nördlich der Eisen-

bahnlinie auch hier zur Entdeckung vorgeschichtlicher Alterthümer führen. Eigenthümliche, offenbar künstlich hervorgerufene Veränderungen der Erdoberfläche, wie sich solche z. B. gleich beim Eintritt der Eisenbahn in den Veltheim-Harbke'schen Forstort Tangerlohen unmittelbar links (nördlich) zur Seite der Bahnstrecke finden, scheinen auf ehemalige Steinbruch- und Bergwerksanlagen zurückzuführen zu sein. Das Terrain südlich von der Eisenbahnlinie ist an den meisten Stellen auch sehr uneben. Mittlere und kleinere Höhen werden durch Thäler getrennt, die zum Theil, wenigstens im Hochsommer, wasserlos sind, zum Theil von Bächen durchflossen werden, welche ihr Wasser in den westlichen Gebieten theilweise über Harbke durch die Wirpke, die Aue und den sogen. Schiffgraben (eine alte künstliche Wasserstrasse zwischen Weser- und Elbgebiet) mit der Bode und dadurch mit der Elbe in Verbindung setzen, in dem östlichen Theile dagegen von Marienborn aus nach Aller-Ingersleben zur Aller und weiterhin zur Weser senden. Der höchste Berg in diesem Gebiete, zugleich im ganzen Kreise Neuwaldensleben und in der ganzen norddeutschen Tiefebene, welche sich zwischen unserer Gegend und dem Meere ausbreitet, südlich von dem Wege von Marienborn nach Harbke gelegen und durch ein trigonometrisches Signal bezeichnet, ist der Grosse Rodenberg (568 preuss. Decimalfuss). In der Nähe desselben befindet sich der Königliche Forstort Streife. — Westlich von der grossen Chaussee, welche Harbke mit der grossen, von Helmstedt über die Helmstedter Warte nach Morsleben führenden Heerstrasse verbindet und von welcher jenseits dieser Strasse in der Richtung nach Nordwesten der Fahrweg nach dem Brunnenthale und Bad Helmstedt abzweigt, liegt nahe an der Eisenbahn südöstlich von der Stelle, wo die sogen. Harbker Kohlenbahn nach Süden zu die Haupteisenbahnlinie verlässt, ein anderer ansehnlicher Berg, der sogen. Burgberg, nach Nordosten, Norden und Westen ziemlich steil abfallend und auf seiner Höhe mit Wällen und Gräben versehen, die man höchst wahrscheinlich als eine vorgeschichtliche Bergburg aufzufassen hat, welche von späteren mittelalterlichen Einbauten unberührt geblieben und in ihrer ursprünglichen Anlage auf uns gekommen ist, allerdings in einem Zustande, der die Uebersicht schwierig erscheinen lässt. Meines Wissens ist bis jetzt der Grundriss dieser alten Burganlage noch niemals

aufgenommen, wenigstens nicht veröffentlicht worden. Die Wälle und Gräben sind an vielen Stellen mit Gebüsch dicht bewachsen, und da ich nur im Sommer bei voller Belaubung der Büsche die Gegend besuchen konnte, ist es mir bis jetzt nicht möglich gewesen, eine genauere Aufnahme dieser Burg selbst auszuführen und auf der Kartenskizze einzutragen, welche diesem Aufsätze beigegeben ist (Taf. I), weshalb diese nur eine schematische Eintragung ungefähr an der Stelle enthält, wo die alte Burganlage zu suchen ist. Nördlich von dem Burgberge sammelt sich das Wasser eines ausgebreiteten Bruchgebietes, zum Theil noch jenseits der Eisenbahn und unter derselben durchgeleitet, in dem sogen. Ellernborn oder der Harbecke, einem Flüsschen, welches auf der Nordseite des Burgberges von Ost nach West, auf der Westseite von Nord nach Süd (in der Richtung auf Harbke, in früherer Zeit weiterhin die in der Mitte der achtziger Jahre abgebrochene sogen. Tangermühle nördlich von Harbke treibend) den Burgberg umfließt und dem Zugange zu demselben von diesen Seiten ein gewisses Hinderniss entgegensetzt. Auf der Westseite des Burgberges ist dieser Fluss überbrückt, und es führt ein Holzabfuhrweg von hier aus auf den Berg, über den Bergrücken fortlaufend Anfangs etwa in der Richtung nach Osten, später ostsüdöstlich und zuletzt fast nach Süden umbiegend. Der wichtigste Theil der vorgeschichtlichen Burganlage scheint nördlich von diesem Wege zu liegen. Schliesslich führt der Weg in die Nähe einer südöstlich vom Burgberge gelegenen Schlucht, in welcher, noch immer westlich von der Harbke-Morslebener Chaussee, der Rest einer sagenreichen mittelalterlichen Wohnstätte sich findet, durch alte Mauerreste kenntlich, die sogen. „Heilige Clause“, in welcher ein Einsiedler gelebt haben soll. Der Name hat sich bei der Bezeichnung der benachbarten Forstorte der Veltheim-Harbke'schen Forst erhalten. Nach Ed. Jacobs hat in einer alten Urkunde von 1607 die umgebende Waldung den Namen „Clusi-Holtz“¹⁾ geführt, und dem Herrn Revierförster Ph. Paulsen in Harbke verdanke ich die Angabe, dass noch jetzt der Waldtheil, in welchem ehemals ein Clausner gewohnt haben soll, das „Claus-

¹⁾ Zeitschrift des Harzvereins für Geschichte und Alterthumskunde. Jahrg. III, 1870, S. 886.

gehäge“ genannt wird und die Bezeichnung: „Heilige Claus“ für den nördlich benachbarten Forstort noch jetzt gebräuchlich ist.

An vorgeschichtlichen Denkmälern kommen, abgesehen von der prähistorischen Burg auf dem Burgberge, die ich bereits erwähnt habe, in der Gegend zwischen Helmstedt, Harbke und Marienborn in Betracht:

1. Megalithische Grabdenkmäler der neolithischen Periode;
2. Kegelgräber der Bronzeperiode, und
3. der sogen. „Opferaltar bei Marienborn“.

Auf der beigegebenen Karte des Gebietes (Taf. I) ist die ungefähre Lage der megalithischen Grabdenkmäler durch liegende Kreuze, die der Kegelgräber durch runde Punkte und diejenige des sogen. „Opferaltars“ durch einen Stern bezeichnet. Die topographische Grundlage für diese Karte zu gewinnen, war nicht leicht, da zusammenhängende neuere Karten des Gebietes in grösserem Maassstabe nicht zu existiren scheinen. Im Allgemeinen habe ich die 1898 entworfene im Maassstabe von 1:25000 angefertigte Revierkarte des Königlichen Oberforstes Bischofswald zu Grunde gelegt, die ich der Güte des Herrn Forstmeisters Ernst Schmidt in Bischofswald verdanke, der mir auch werthvolle Angaben über die Bezeichnungen der Wege und Forstorte, sowie über die Alterthümer zukommen liess. Auch der specielle Verwalter der Königlichen Forsten bei Marienborn, der Königliche Förster, Herr Busse in Marienborn, hat mir besonders durch Angabe von Forstortsbezeichnungen eine wesentliche Unterstützung zu Theil werden lassen. Die westlichen Theile der Karte sind nach dem betreffenden, allerdings grösstentheils veralteten, Blatte der Generalstabskarte, sowie nach meinen eigenen Aufnahmen und nach den Angaben und Zeichnungen ergänzt, welche ich dem Herrn Revierförster Ph. Paulsen in Harbke verdanke. Das Blatt „Walbeck“ (Nr. 2029) der Generalstabskarte, das in seiner südwestlichen Ecke für die Gegend zwischen Helmstedt, Harbke und Marienborn vorzugsweise in Betracht kommt¹⁾ und bis dahin nur in den Aufnahmen von 1858 bis 1873 mit Nach-

¹⁾ Ergänzt würde das Blatt nach Westen durch das überhaupt noch nicht erschienene Blatt „Süplingen“ (Nr. 2028) und nach Süden durch das nur in alter Auflage vorliegende Blatt „Badeleben“ (Nr. 2097) werden.

trag von 1895 vorliegt, ist zwar im vorigen Jahre ganz neu aufgenommen und soll so schon fertig gedruckt vorliegen; doch ist dasselbe leider bis zur Abfassung dieses Aufsatzes noch nicht im Buchhandel erschienen. Dem Vernehmen nach soll dieses Blatt, das jedenfalls sehr bald erscheinen wird, auch die Kegelgräber bei Marienborn, wenigstens die grösseren, eingezeichnet enthalten. — Ich gehe nun zur Besprechung der drei verschiedenen Gruppen vorgeschichtlicher Denkmäler über, welche sich in unserem Gebiete finden:

I. Megalithische Grabdenkmäler.

Das Vorkommen solcher Denkmäler aus neolithischer Zeit in unserem Gebiete, und zwar an verschiedenen Stellen, sowohl nahe bei Marienborn, als auch in der Nähe von Harbke, dürfte deshalb ein besonderes Interesse darbieten, weil dadurch gewissermaassen eine Brücke hergestellt wird, welche von Osten nach Westen die an Megalithen so überaus reiche Gegend westlich von Neuahaldensleben mit den Lübbensteinen bei Helmstedt verbindet. Hierdurch wird die früher meist fälschlich gehegte und zum Ausdrucke gekommene Meinung, als ob die Lübbensteine ganz isolirt lägen und als weit vorgeschobene Posten in der Verbreitung von megalithischen Grabdenkmälern aufzufassen wären, widerlegt. Leider sind die Megalithe unseres Gebietes, die den einheimischen Alterthumsfreunden schon seit langer Zeit bekannt sind und die ich selbst zum Theil schon 1884 auf Grund mündlicher und, wie ich glaube, auch gedruckter Angaben aufsuchen konnte, in früheren Jahrzehnten, als man die Bedeutung derselben noch nicht zu würdigen verstand, arg zerstört und vernichtet. Von etwa zehn solchen Grabdenkmälern, die nach der Erinnerung der noch jetzt lebenden Forstbeamten und sonstigen Ortskundigen sich hier gefunden haben, sind jetzt höchstens noch fünf nachweisbar. Nach meinen Beobachtungen, die ich im Hannoverschen und Oldenburgischen, in der Altmark und in der Umgegend von Neuahaldensleben, sowie an manchen anderen Stellen Norddeutschlands an ähnlichen Denkmälern der Vorgeschichte zu machen Gelegenheit hatte, und die ich auch auf Reisen in anderen europäischen Ländern, besonders im südlichen England und in der Bretagne, dem classischen Lande vorgeschicht-

licher Steindenkmäler, zu ergänzen in der Lage war, kann ich aber nicht umhin, meine Meinung bestimmt dahin auszusprechen, dass es sich auch in unserem Gebiete um wirkliche megalithische Grabdenkmäler handelt, eine Meinung, die auch von den einheimischen Alterthumsforschern getheilt wird und wiederholt zum Ausdruck gebracht ist. Schon im Jahre 1776 schreibt Jo. Arnold Ballenstedt in Schöningen¹⁾: „Es ist nicht unbekannt, dass in dieser östlichen Gegend des Elms von Schöningen, Helmstedt bis Hörsingen und Neuwaldensleben die sogenannten Steingerichte, oder Stein- und Hünenbette liegen, welches zum Theil Opfersteine, zum Theil aber Grabhügel sind, weil Urnen darunter gefunden werden“, und noch deutlicher ist 1787 der Zusammenhang zwischen den Lübbensteinen und den megalithischen Denkmälern bei Neuwaldensleben betont in dem die Form eines Briefes an einen Freund darbietenden Aufsätze²⁾ eines ungenannten Verfassers, der offenbar in Schöningen gelebt hat und sich als Schüler des dortigen Rectors Ballenstedt bezeichnet: „Diese Urnen und Donnerkeile finden sich auch unter den sogenannten Stein- und Hühnenbetten, auch Steingerichte genannt, welche sich von Helmstedt an bis Neuwaldensleben erstrecken, und zum Theil Opfersteine, zum Theil aber Grabmäler gewesen sind.“ Dass der Verf. unter diesen Denkmälern wirkliche megalithische Grabmäler versteht, ersieht man aus dem nächsten Satze: „Das merkwürdigste von diesen Hühnenbetten in der dortigen Gegend ist der Corneliusberg bey Helmstedt, ehemals der Lübbenstein genannt u. s. w.“

Von Osten nach Westen folgen die nachweislich vorhanden gewesen und jetzt nur noch zum Theil vorhandenen derartigen Steindenkmäler in nachstehender Reihenfolge auf einander:

1. Eine Gruppe von sechs Steinen, die vermuthlich als Rest eines megalithischen Grabes zu betrachten ist, findet sich in der südwestlichen Ecke des mit dem Namen „Mittelbusch“ bezeichneten Districts 10 b der Königlichen Forst, etwa 67 Schritt nördlich vom sogen. „Bierwege“, der diesen Namen von der Zeit her führt,

¹⁾ Meine Spatziergänge nach dem Elm (Von den Merkwürdigkeiten der Braunschweigischen Länder, besonders des Elms). Schulprogramm. Schöningen 1776. 4^o. S. 9. — ²⁾ Ueber Versteinerungen und Alterthümer der Gegend um Schöningen (Gelehrte Beyträge zu den Braunschweig. Anzeigen 1787, St. 3 bis 5 vom 10. Januar, 13. Januar und 17. Januar, S. 9 bis 20; cf. S. 20).

in welcher auf demselben das berühmte Harbker Bier nach Osten abgefahren wurde, und etwa 50 Schritt östlich von der die Bestands-grenze gegen den District 10 c bildenden Schneise, nicht weit von der Stelle, wo augenblicklich in dem gemischten Laubwald-dickicht sich zwei hohe Lärchentannen erheben. Die Steine sind sämtlich Sandsteine, die den sogen. Knollensteinen, Quarzsandsteinen oder Braunkohlenquarziten der Lübbensteine ähnlich zu sein scheinen. In der von WSW nach ONO verlaufenden Längsrichtung misst die Gruppe etwa 15 Schritt. Im Westen bildet ein langer schmaler Stein mit einem ziemlich tiefen Seiten-loche auf der nördlichen Hälfte den Abschluss und ist vielleicht als Giebelstein der ehemaligen Grabkammer zu deuten. Auf der Nordseite liegen zwei kleine Steine in regelmässiger Gruppierung, vielleicht zwei Tragsteine; die zwei grösseren Steine, welche am Ostende der jetzigen Gruppe liegen, und ein grosser rundlicher Stein, welcher auf der Südseite etwa die Mitte einnimmt, sind schwieriger zu deuten, wahrscheinlich aber als niedergesunkene Decksteine zu bezeichnen. Eine geringe Erhebung des Bodens ist an der Steingruppe zu bemerken. — Etwa 30 Schritt nördlich von dieser Steingruppe liegt im Waldesdickicht ein grosser ähnlicher Sandstein, etwa 0,90 m breit und 2,20 m lang, mit der Längsachse von Süd nach Nord gerichtet. Vielleicht hat dieser Stein ursprünglich mit zu dem Grabe gehört; vielleicht auch ist er der letzte Rest eines anderen Grabes. — Die Funde von Steingeräthen, welche der Herr Förster Jentsch in einem „Hünengrabe in der Nähe von Marienborn“ gemacht hat und die Herr Cantor Otto Zeiseweis (Kl. Bartensleben) in der Sitzung des Aller-Vereins vom 24. August 1894 vorgelegt hat¹⁾, stammen vermuthlich von dieser Stelle. Eine sichere Auskunft habe ich darüber aber nicht erhalten können.

2. Da wo der von dem alten Helmstedter Stadtwege, der als Fortsetzung des früheren Papenstiegs in ungefähr nordwestlicher Richtung von dem Bierwege ausgeht, nördlich von der neuen Hauptschneise nach Westen sich abzweigende Fahrweg einen tieferen Thaleinschnitt zu passiren hat und deswegen eine Schleife nach Süden bildet und zwei Brücken sich finden, hat etwa nord-

¹⁾ Neuhaldenslebener bzw. Calvörder Wochenblatt vom 18. August 1894, Nr. 96 und vom 22. September 1894, Nr. 111, Beil.

westlich von diesen Brücken auf der westlichen Seite dieser Wegschleife ein grosses megalithisches Grabdenkmal gelegen und zwar im Forstdistrict 13 d der Königlichen Forst, welche hier den Namen „Teufelsgrund“ oder „Teufelsarsch“ führt, woran sich nördlich der Forstort „Kielenköpfe“ anschliesst. Nach den Angaben des Herrn Forstmeisters Ernst Schmidt hat sich hier eine schon früher zerstörte und zusammengebrochene Grabkammer befunden, die von einem Steinkreis umgeben war. Bei dem Bau des beschriebenen Weges ist dies Grab sorgfältig geöffnet und sind die sämtlichen Steine entfernt und in einer Gesamtmenge von etwa 28 cbm zum Bau der beiden genannten Brücken verwendet. Die Stellen, wo die Steine gelegen haben, sollen noch jetzt an den zurückgebliebenen Löchern mehr oder weniger deutlich zu erkennen sein. Meine Vermuthung, dass die Schilderung, welche der Cantor Otto Zeiseweis (Kl. Bartensleben) in dem Sitzungsberichte des Aller-Vereins vom 2. November 1892 von der Oeffnung eines solchen Grabes in der Forst bei Marienborn gegeben hat¹⁾, sich auf das in Rede stehende megalithische Grab bezieht, hat mir brieflich der genannte Herr bestätigt. Es heisst dort²⁾: „Das geöffnete Grab bestand aus einem äusseren, 90 m im Umfange messenden und einem inneren Steinkreise [den Tragsteinen der Grabkammer], welcher von einem 2½ m langen und 1½ m breiten Deckelsteine überdeckt war. Das zur Setzung des Grabes verwandte Steinmaterial war sämtlich weisskörniger, aber sehr harter Sandstein. Die Grabhöhlung [Grabkammer] war in der Mitte mit fettiger, schwarzer Erde ausgefüllt. Da in der Mitte der Höhlung weder Knochenreste noch irgend welche Geräthe oder Gefässe gefunden sind, so muss, nach der vorhandenen fettigen Erde zu schliessen, angenommen werden, dass der in dem Grabe beigesetzte Todte in hockender Stellung beerdigt worden ist, welche Stellung eine vollständige und schnelle Verwesung der Leichen zur Folge hat. Die etwas an der Seite innerhalb des inneren Steinkreises [der Grabkammer] in einer Vertiefung aufgefundenen Gefäss-, Knochen- und Steinreste sind sogenannte Beigaben. Die Knochenreste rühren von den beim Be-

¹⁾ Neuhaldenslebener bezw. Calvörder Wochenblatt vom 19. November 1892, Nr. 135, Beil. — ²⁾ Die eckigen Klammern umschliessen meine Zusätze.

gräbniss den Göttern geopfert Thieren, die Gefässreste von den nach der Opferung zerschlagenen Opfergefässen her.“

3 bis 5. An der Stelle, wo der von Marienborn über die Helmstedter Warte nach Helmstedt führende Fahrweg aus seiner bis dahin im Ganzen westlichen Richtung in die nördliche umbiegt, sollen nach den mündlichen Angaben des verstorbenen Herrn Gustav Maass in Altenhausen östlich vom Wege, nicht weit von dem mit dem Namen „Görnichen“ bezeichneten Königl. Forstdistrict 15 in dem Veltheim-Harbkeschen Forstort „Steingehäge“, drei megalithische Grabdenkmäler gelegen haben. Herr Revierförster Ph. Paulsen in Harbke hat dies mir gegenüber im Allgemeinen bestätigt und angeführt, dass die grossen Steine dieser Gräber 1875 nach Harbke abgefahren sind, so dass jetzt nur noch einige Spuren dieser vorgeschichtlichen Denkmäler vorhanden sind und eigentlich nur noch ein einziges mehr nördlich im Steingehäge gelegenes Grab in einigen Steinresten erhalten ist und als Nr. 5 gezählt werden kann.

6 bis 8. Auf der anderen (westlichen) Seite des Weges von Marienborn nach Helmstedt, den letzten drei Gräbern gegenüber, im Veltheim-Harbke'schen Forstorte „Schloop“ sollen nach denselben Gewährsmännern drei andere megalithische Gräber gelegen haben, die ebenfalls 1875 durch Entnehmen von Steinen grösstentheils zerstört sind, so dass augenblicklich auch hier nur ein einziges mehr nördlich gelegenes Grab in einigen Steinresten erhalten ist und als Nr. 8 gezählt werden kann.

9. Etwa nordwestlich von dieser Stelle befindet sich auf der rechten, also südöstlichen Seite der von Harbke nach Morsleben führenden Chaussee, nicht mehr als 30 bis 40 Schritt von derselben entfernt, in dem Buchenhochwalde des Veltheim-Harbke'schen Forstorts „Neuegehäge“, der auch wohl im Volksmunde „Grosser Buchenbusch“ genannt wird, gegenüber einer als Fichtenschonung in Cultur genommenen Waldblösse, bezeichnet als „Kühlewiesengehäge“, der Rest eines grossen megalithischen Grabmals, das zunächst als ein ca. 45 Schritt langer und ca. $12\frac{1}{2}$ Schritt breiter, 1 bis $1\frac{1}{2}$ m hoher Grabhügel erscheint, auf welchem noch 10 mehr oder weniger grosse Sandsteinblöcke in unregelmässiger Gruppierung zu erkennen sind, die höchst wahrscheinlich die letzten Ueberbleibsel des umgebenden Steinkreises

darstellen. Ob die Grabkammer zerstört worden oder mit Erde bedeckt noch in der Mitte dieses langgestreckten gewaltigen Hügels vorhanden ist, konnte ich bis jetzt nicht feststellen.

10. Auf dem oben beschriebenen, südlich von der Helmstedter Warte und der Eisenbahn gelegenen Burgberge und zwar auf der Südseite des erwähnten Holzabfuhrweges, welcher von der den Ellernborn (die Harbecke) überschreitenden Brücke aus Anfangs in östlicher, später mehr in südöstlicher Richtung über den Rücken des Burgberges hinläuft, soll nach den Angaben des Herrn Revierförsters Ph. Paulsen sich noch jetzt ein megalithisches Grabmal befinden, wie ich vermuthete, ungefähr südöstlich von der früher erwähnten vorgeschichtlichen Burganlage. Trotz mehrmaliger Versuche ist es mir noch nicht gelungen, dieses und die beiden unter 5 und 8 erwähnten Gräber im Waldesdickicht aufzufinden.

Eigene Ausgrabungen habe ich an den megalithischen Grabdenkmälern unseres Gebietes bis jetzt nicht machen können. Was mir über andere Ausgrabungen bekannt geworden ist, habe ich bei den Gräbern Nr. 1 und 2 erwähnt. Die bei diesen Ausgrabungen zu Tage geförderten Fundgegenstände sind grösstentheils in die Sammlungen des Aller-Vereins in Neuahaldensleben gelangt. Braunschweigische Museen und Sammlungen scheinen nach den von den verschiedenen Museumsvorständen mir freundlichst gemachten Mittheilungen keine Fundstücke daher zu enthalten; ebenso wenig das Provinzialmuseum zu Halle a. S.

II. Kegelgräber.

Während die megalithischen Grabdenkmäler nur in verhältnissmässig geringen Resten sich auf dem in Rede stehenden Gebiete erhalten, vielleicht auch von vornherein nur befunden haben, kann ich von den offenbar sämmtlich der Bronzeperiode angehörenden Kegelgräbern im Voraus berichten, dass mir in Norddeutschland keine Stelle bekannt ist, auf welcher sich in so grosser Zahl, in so stattlicher Grösse und in so dichten Gruppen diese Zeugen von Jahrtausenden bis in unsere Zeit erhalten haben wie bei Marienborn. Die herrlichen Schilderungen und Abbildungen, welche G. O. Carl von Estorff aus der Um-

gend von Uelzen von grossen Gruppen solcher Gräber giebt¹⁾, entsprechen nicht mehr den jetzigen Verhältnissen, wie ich kürzlich auf einer Reise durch diese Gebiete zu meinem grossen Leidwesen erfahren habe. Die meisten dortigen Grabhügel sind eingeebnet und verschwunden. Auch die zahlreichen im Elm gelegenen, von Joh. Christ. Dünnhaupt beschriebenen Kegelgräber sind zwar noch im Buchenhochwalde, zumal an der Grenze zwischen den Gebieten von Lelm und Rábke, in grosser Zahl zu erkennen, befinden sich jedoch in Folge der Ausgrabungen und der nivellirenden Wirkung der Zeit jetzt in einem recht mangelhaften Zustande. Die von Carl Hermann Langerfeldt ausführlich beschriebenen sogen. „Todtenhügel“ von Hohenassel²⁾ sind zwar zahlreich in zwei verschiedenen Gruppen in den Buchenwäldern bei Hohenassel noch jetzt erhalten; doch sind sie durchschnittlich von viel geringerer Grösse und nach dem allgemeinen Eindrücke, den ich bei einem kürzlichen Besuche dieser Stelle gewann, auch von viel geringerer Zahl. — Reich ist auch die für Megalithe so überaus ergiebige Gegend westlich von Neuhaldensleben an Kegelgräbern der Bronzeperiode. Sehr grosse, mittlere und kleinere Kegelgräber finden sich hier einzeln oder in kleineren Gruppen in dem Gebiete zwischen Alvensleben im Süden, Süplingen im Norden, Neuhaldensleben im Osten und Altenhausen im Westen vertheilt, und in der Freiherrlich v. Schenk'schen Forst bei Alvensleben und Dönstedt, in einem Kiefernwalde von mittlerem Alter liegt auf kleinem Raume vereinigt ein überraschend schön erhaltener ganzer Friedhof von Kegelgräbern, der von grossem Interesse ist. Allein die Zahl der Grabhügel, die hier an einer Stelle zusammenliegen, beträgt nach den genauen Aufnahmen des verstorbenen Herrn Gustav Maass in Altenhausen nur etwas mehr als vierzig. Auf unserem Gebiete bei Marienborn handelt es sich dagegen um eine beträchtlich grössere Zahl. — Schon Christian Ludewig Schäffer, der auf dem Timiansberge südlich von Harbke und auf dem Blauen Berge südöstlich von diesem Orte zahlreiche Kegelgräber ent-

¹⁾ Heidnische Alterthümer der Gegend von Uelzen im ehemaligen Bardengaue (Königreich Hannover), Hannover 1846, Hahn. Taf. III u. a. Sp. 23 ff. — ²⁾ Die Todtenhügel bei Hohenassel. Erste Mittheilung (Braunschweig. Magazin 1852, St. 20 vom 15. Mai. S. 161 bis 167).

deckte und beschrieb, ist auf die ähnlichen Gräber bei Marienborn aufmerksam geworden. Er scheint der erste gewesen zu sein, der dieselben erwähnt hat, und zwar im Jahre 1764 mit folgenden Worten¹⁾:

„Nicht weit von meinem Grabberge [dem Blauen Berge], jenseit des Thals, welches denselben umgiebt, ist ostwärts im Kloster Marienbornischen Holze ebenfalls ein solcher Berg, auf welchem sich noch mehrere Hügel befinden, als auf dem meinigen. Sie sind auch zum Theil viel grösser, sonderlich nimmt sich einer darunter sehr aus. Er ist völlig regulair, über 10 Fuss hoch, und hat in Umkreiss auf 30 Schritt. Um ihn herum liegen fast in einem förmlichen Cirkul einige andere Hügel, welche auch eine vorzügliche Höhe haben. Ich glaube nicht ohne Grund zu muthmassen, dass allhier eine fürstl. Person begraben liegt, beklage aber dabey, dass sich noch nicht Gelegenheit gefunden, diese Hügel zu untersuchen.“ Bald nachher muss dies von Schäffer selbst oder Anderen angefangen sein. Denn 1776 berichtet Jo. Arnold Ballenstedt in Schöningen²⁾, dass „noch alle Jahre Grabhügel mit Todtentöpfen bey Harbke, in dem Gehölze bey Marienborn etc. ausgegraben“ werden. Einige Zeit später (1787) erwähnt ferner ein Aufsatz³⁾ von einem ungenannt gebliebenen Schöninger Gelehrten, der sich als Schüler des Rectors Ballenstedt daselbst bekennt, kurz auch die Grabhügel bei Helmstedt und Marienborn. Dann scheinen die Gräber von Marienborn in der Literatur mehr als ein Jahrhundert hindurch unbeachtet geblieben zu sein. Die erste neue Erwähnung jener Kegelgräber finde ich in dem Sitzungsberichte des Aller-Vereins vom 24. November 1890⁴⁾, wo es nach einer Mittheilung des

¹⁾ Beyträge zur Vermehrung der Känntniss der Teutschen Alterthümer. Mit (3) Kupfern. Quedlinburg und Leipzig, Andreas Franz Biesterfeld, 1764. 8°. S. 54 und 55. — Ein kurzer Auszug aus diesen Mittheilungen findet sich einige Zeit nachher bei Jo. Arnold Ballenstedt, Der erste Versuch über einige Merkwürdigkeiten der Braunschweigischen Länder. Schöninger Schulprogramm. Helmstedt 1771. 4°. S. 5. — ²⁾ Meine Spatziergänge nach dem Elm (Von den Merkwürdigkeiten der Braunschweigischen Länder, besonders des Elms). Schulprogramm. Schöningen 1776. 4°. S. 9. — ³⁾ Ueber Versteinerungen und Alterthümer der Gegend um Schöningen (Gelehrte Beyträge z. d. Braunschweig. Anzeigen 1787, St. 3 bis 5 vom 10. Januar, 13. Januar und 17. Januar, S. 9 bis 20; cf. S. 19). — ⁴⁾ Neuhaldenslebener bzw. Calvörder Wochenblatt vom 29. November 1890, Nr. 139, Beil. 2.

Cantors Friedr. Mewes in Wegenstedt über einen im Fauter'schen Garten daselbst befindlichen Tumulus, genannt „Hünneckenberg“, von 5 m Höhe und 15 m Durchmesser, der oben eine trichterförmige Einsenkung“ zeigt, weiter heisst: „Im Anschlusse hieran berichtet der Vorsitzende (Gustav Maass) über eine von ihm entdeckte und besuchte, zwischen dem Grossen Rodenberge und dem Bahnhofe Marienborn gelegene, grösste Kegelgrabgruppe. Dieselbe umfasst 35 Gräber; davon sind drei mit Steinblöcken besetzt; 12 sind an der Spitze mit der schon erwähnten, charakteristischen, trichterförmigen Einsenkung versehen.“

Später hat Gustav Maass seine Untersuchungen über die Kegelgräber von Marienborn vervollständigt und von den betreffenden Forstbeamten und anderen Ortskundigen weitere Nachrichten darüber eingezogen, deren mündliche Mittheilung mir die Anregung zu weiteren Forschungen in dieser Gegend gegeben hat. Ich kann jetzt anführen, dass bei Marienborn auf verhältnissmässig nicht sehr grosser Fläche nicht weniger als etwa hundert Kegelgräber von den verschiedensten Grössen sich in dichten Gruppen vereinigt finden. Einen genauen Lageplan dieser Kegelgräber zu geben, ist mir leider noch nicht möglich; aber auf Grund der kartographischen Angaben, welche ich dem Herrn Forstmeister E. Schmidt in Bischofswald und dem Herrn Königl. Förster Busse in Marienborn verdanke, und meiner eigenen ungefähren Aufnahmen kann ich wenigstens ein annäherndes Bild von der Lage der Grabhügel auf der der Abhandlung beigegebenen Karte (Taf. I) liefern. Am schnellsten erreicht man von der Eisenbahnstation Marienborn aus das Gebiet der Kegelgräber, wenn man, entweder auf der Süd- oder auf der Nordseite des Schienenweges, der Eisenbahn entlang auf einem Fahr- bzw. Fusswege bis zur Wärterbude Nr. 25 geht, von hier aus etwa südwestwärts ungefähr 100 Schritt den Fahrweg von Morsleben nach Marienborn einschlägt, um dann rechts auf den sogen. „Bierweg“ in den Wald abzubiegen. Verfolgt man diesen Weg ungefähr 530 Schritt weit, so hat man zur Rechten in einer Entfernung von etwa 67 Schritt vom Wege die Reste des oben erwähnten megalithischen Grabes Nr. 1; etwa 50 Schritt weiter geht nach Norden eine gerade Schneise ab, die bis in die Gegend der Wärterbude Nr. 24 führt und die Forstdistricte 10 und 12 geradlinig durchschneidet. Oest-

lich von dieser Schneise, die durch die sogen. „Neue Hauptschneise“ etwa in der Mitte ziemlich rechtwinkelig durchschnitten wird, liegt ein Laubwalddickicht, das vorzugsweise mit dem Namen „Mittelbusch“ bezeichnet zu werden pflegt; westlich befindet sich ein verschieden breiter Streifen von Buchenhochwald, in welchem südlich und nördlich von der „Neuen Hauptschneise“ zwei Pflanzkämpfe, rechtwinkelig durch Staket umgrenzt, angelegt sind. In diesem zum Theil den vielleicht als „Heidenberg“ zu deutenden Namen „Heidberg“ führenden Buchenhochwaldstreifen, welcher sich von dem Bierwege aus etwa 750 bis 850 Schritt weit nach Norden bis zur Eisenbahnlinie ausdehnt und in seinen nördlichsten Theilen auch Spuren früheren Bergbaues bezw. Steinbruchbetriebes zeigt, liegen, in einer Entfernung von 50 bis nicht ganz 600 Schritt vom Bierwege, etwa 20 stattliche und wohl-erhaltene Kegelgräber in den verschiedensten Grössen, zu beiden Seiten eines Fussweges, welcher westlich neben der oben genannten Schneise in verschiedenen unregelmässigen Windungen nordwärts läuft und schliesslich nach der Wärterbude 24 zu gehen scheint. Die nördlichsten Grabhügel liegen im Forstdistrict 12 zu zweien an der nordwestlichen Ecke des nördlichsten Pflanzkamps, die grössten und besterhaltenen im District 10 auf der Südseite des südlichen Pflanzkamps. Auf einem Hügel an der Südwestecke desselben befinden sich grössere Steine gruppiert; ebenso ist das in dieser Reihe am südlichsten liegende, von dem Bierwege etwa 50 Schritt entfernte Kegelgrab, das, ein ungefähr von SO nach NW gerichtetes Oval bildend, etwa 20 Schritt im Längsdurchmesser und 12 Schritt im Querdurchmesser misst und bis zu einer Höhe von wenig mehr als $1\frac{1}{4}$ m zusammengesunken ist, auf seiner Oberfläche mit fünf sehr verschieden grossen Steinen besetzt: Am einen Ende liegen drei Steine zusammen, ein kleiner und zwei grosse, sämmtlich Quarzsandsteine, wie es scheint, Braunkohlenquarzite; von den beiden grösseren zeigt der ganz am Ende gelegene ein helles, glänzendes Ansehen, während der andere wenigstens in der Form an die Knollensteine der Lübbensteine erinnert und auf der einen Seite zwei Vertiefungen besitzt, die den schalenartigen Vertiefungen (Blutbecken) des sogen. Opferaltars von Marienborn ähnlich sind. An dem anderen Ende liegt ein grösserer flacher Sandstein und ein kleiner rund-

licher Stein, der ausnahmsweise als ein erratischer Granitblock anzusprechen ist. Zuerst war ich geneigt, dieses vorgeschichtliche Denkmal nicht für ein Kegelgrab, sondern für ein grösseres megalithisches Grab zu halten. Wenn ich diese Meinung bis auf Weiteres aufgegeben habe, so folge ich dabei der Autorität des Herrn Gustav Maass und den Beobachtungen, welche Chr. Lud. Schäffer an ähnlichen mit Steinen belegten Grabhügeln bei Harbke gemacht hat. Eine Ausgrabung kann vielleicht lehren, welche Deutung die richtige ist.

Der oben beschriebene Fussweg, der mitten durch die erwähnte nördliche Reihe von Kegelgräbern hindurchgeht, setzt sich südlich vom Bierwege in der Richtung auf Marienborn fort durch den Forstdistrict 6, der den Namen „Schulberg“ führt. Zu beiden Seiten dieses Fussweges liegen auch hier im Buchenhochwalde, bis zur Grenze des nördlich nahe bei Marienborn gelegenen Stangenholzes (District 6 a) hin, zahlreiche wohlerhaltene Kegelgräber, und je weiter man nach Süden in der Richtung auf Marienborn sich dem Stangenholze nähert, desto mehr breitet sich die Zone der Kegelgräber nördlich vom erwähnten Stangenholze nach Westen hin aus, und zwar in ein Gebiet hinein, das ausserdem in tiefen Gruben und aufgethürmten Wällen offenbar die Spuren früheren Bergbaues oder Steinbruchbetriebes zeigt. Man kann diese südlichste Stelle der zusammenhängenden Reihe von Kegelgräbern auch bequem so erreichen, dass man von der Wärerbude Nr. 25 aus, ohne rechts auf den sogen. Bierweg abzuschwenken, den Fahrweg von Morsleben nach Marienborn am Waldrande bis dahin verfolgt, wo der Buchenhochwald zur Rechten durch ein dichtes Stangenholz (District 6 a) abgelöst wird, und indem man dann halbrechts, der Bestandesgrenze entlang, etwa 240 Schritt durch den Wald geht, bis man auf den oben beschriebenen Fussweg stösst, der nordwärts mitten durch das Gebiet der Kegelgräber hindurchführt, und den man als den „Gräberweg“ bezeichnen kann. Im Ganzen habe ich südlich vom Bierwege in dem „Schulberg“ genannten Forstdistrict 6 nahezu 40 Kegelgräber in den verschiedensten Grössen zählen können. Bei einem mittelgrossen Grabhügel dieses Gebietes war bei einer Höhe von ungefähr $1\frac{1}{4}$ m ein Umfang von etwa 76 Schritten festzustellen. — Auf der Südseite des sogen. Bierweges setzt sich

ferner nach Westen zu fast ununterbrochen (es kommen allerdings grabhügelfreie Zwischenräume von etwa 120 bis 180 Schritt vor) das Gebiet der Kegelgräber fort, und es wird schliesslich fast der ganze spitze Winkel schönsten Buchenhochwaldes von einer ausgedehnten Gruppe zum Theil sehr grosser Kegelgräber erfüllt, welcher von einer grossen Kiesgrube und einem derselben gegenüber gelegenen sogen. Mordkreuze an beginnend und ostwärts sich öffnend durch den Bierweg im Norden und den am Waldrande hinführenden Weg von Harbke bzw. Helmstedt nach Marienborn im Süden begrenzt wird. Der innerhalb des Waldes nahe dem Waldrande verlaufende Fussweg nach Marienborn ist hier mitten durch die Kegelgräber hindurchgeführt, so dass der Weg sogar einige Gräber anschneidet, andere überschreitet. Der Forstort, welcher in seinem westlichen Winkel so viele Kegelgräber enthält, ist der den Namen „Allee“ führende Forstdistrict 7, der in seinen von Grabhügeln freien östlichen Theilen durch den sogen. Papenstieg, den jetzt als Holzabfuhrweg benutzten Anfang des alten Helmstedter Stadtweges, durchschnitten wird. Für den Thalgrund, in welchem dieser Weg von Marienborn aus ansteigt, ist der Name Tartergrund oder Tatergrund gebräuchlich, entweder von Tartaren oder dem Ausdruck „Tatern“ für Zigeuner abzuleiten, wie es nach den Mittheilungen des Herrn Forstmeisters E. Schmidt z. B. im Norden noch verschiedene sogen. Taterbäume giebt. — Die Zahl der in dem Forstdistrict 7 („Allee“) liegenden Kegelgräber genau festzustellen, war mir nicht möglich. Es ist ohne genaue topographische Aufnahme zu leicht möglich, den einen Grabhügel doppelt zu zählen und andererseits wieder einen anderen bei der Zählung zu übersehen. Nach mehrmaligen Abzählungen glaube ich aber doch die Zahl der in diesem Forstdistrict zumeist dicht gedrängt neben einander gelegenen Kegelgräber auf mindestens 40 angeben zu dürfen. — Etwas abseits von den bisher erwähnten Grabhügeln liegt endlich nach den Angaben des Herrn Königl. Försters Busse westlich von der Stelle, wo im Teufelsgrunde sich der Fahrweg von dem alten Helmstedter Stadtwege spitzwinkelig trennt, noch ein vereinzelt grosser Kegelgrab. Herr Cantor Otto Zeiseweis in Kl. Bartensleben theilte mir mit, dass der Grabhügel oben mit zwei auffallend grossen Steinen belegt ist, so dass er geneigt ist, denselben für

eine Opferstätte zu halten. Rechnen wir zu diesen mehr als 40 Gräbern die nahezu 40 Grabhügel im Forstdistrict 6 („Schulberg“) und die etwa 20 Kegelgräber, welche ich zuerst als nördlichste in den Forstdistricten 10 und 12 auf dem sogen. Heidberg erwähnt habe, so ergibt sich daraus eine Gesamtzahl von etwa 100 Kegelgräbern, die in den Wäldern nördlich und nordwestlich nahe bei Marienborn zu finden sind. — Einige dieser Gräber sind offenbar schon in früherer Zeit geöffnet worden; berichtet doch schon Jo. Arnold Ballenstedt im Jahre 1771, dass schon vor 30 Jahren bei Marienborn Urnen ausgegraben seien¹⁾, und im Jahre 1776, dass alle Jahre Grabhügel mit Todtentöpfen bei Harbke, in dem Gehölze bei Marienborn etc. ausgegraben würden²⁾, und es sind auch Fundgegenstände aus denselben, darunter Bronzegeräte, in die Alterthumssammlungen benachbarter Ortschaften gekommen. Was in dieser Beziehung die Städte Braunschweig und Wolfenbüttel anbelangt, so habe ich zwar von Herrn Professor Dr. Chr. Scherer erfahren, dass in den vorgeschichtl. Sammlungen des Herzoglichen Museums zu Braunschweig sich keine Fundstücke aus den Kegelgräbern von Marienborn befinden, und eine gleiche Mittheilung verdanke ich Herrn Archivrath Dr. Paul Zimmermann in Wolfenbüttel betreffs der dortigen Sammlungen des Braunschweigischen Geschichtsvereins. Der Director des Städtischen Museums in Braunschweig, Herr Dr. Franz Fuhse, konnte mir dagegen freundlichst mittheilen, dass dasselbe einen Fund „aus einem Tumulus bei Marienborn“ besitzt, der 1858 von dem Pharmaceuten Görges aus Braunschweig gemacht ist. Es handelt sich um eine in der Mitte erweiterte Aschenurne mit Deckel. Die Urne ohne Deckel ist 15 cm hoch; die Höhe von dem Boden bis zur umfangreichsten Stelle beträgt 7 cm. Der grösste Durchmesser ist 25 cm, derjenige des Bodens 10 cm und der oberen Oeffnung 20 cm. „Der flache Deckel ist sehr schlecht erhalten und durch thörichte Wiederherstellung in seiner ursprünglichen Form unkenntlich. Material: Grauer feingeschlämmter Thon.

¹⁾ Der erste Versuch über einige Merkwürdigkeiten der Braunschweigischen Länder. Schöninger Schulprogramm. Helmstedt 1771. 4^o. S. 5. — ²⁾ Meine Spatziergänge nach dem Elm (Von den Merkwürdigkeiten der Braunschweigischen Länder, besonders des Elms). Schulprogramm. Schöningen 1776, S. 9.

— Der Inhalt besteht ausser calcinirten Knochen aus Stücken von dünnem Bronzeblech, die ihrer Form nach zu verschiedenen, aber nicht mehr festzustellenden Gegenständen gehörten. Sie sind meist mit Riefelung (quer) versehen; ein Stück hat ausserdem kleine warzenförmige Erhebungen. Ein anderes Stück hat offenbar den Rand eines kleinen Gefässes (Hängebeckens?) gebildet. Ausserdem ein Stück starken Bronzedrahtes. Dann: Bruchstücke eines Bernsteinringes; das grösste erhaltene Stück hat einen Durchmesser von 8 mm und ist an einem Ende durchlocht. Dann: Stücke eines Thonringes und ein Feuersteinsplitter, der Schaberform nahekommend, aber offenbar nicht fertig bearbeitet.“ Nähere Angaben über die Ausgrabung dieser Urne mit dem mannigfaltigen Inhalt fehlen leider. — Das vereinzelte Grab im Teufelsgrunde soll nach den Angaben des Herrn Försters Busse in Marienborn „vor einigen Jahren“ aufgedeckt sein, ehe er selbst sich in der dortigen Stellung befunden hat. Ueber das Ergebniss dieser Ausgrabung ist mir nichts bekannt geworden. In den Hausarchiven des Herrn Rittergutsbesitzers v. Löbbbecke zu Marienborn, sowie in den kirchlichen Chroniken und Kirchen- und Orts-Acten von Marienborn sind keine Notizen über frühere Ausgrabungen zu finden, wie Herr Pastor Kittlaus daselbst mit vieler Mühe freundlichst festgestellt hat. — Selbst Ausgrabungen dort zu veranstalten, war ich bis jetzt ausser Stande, obgleich von den maassgebenden Personen bereitwilligst mir die Erlaubniss dazu ertheilt wurde. Es dürfte eine interessante Aufgabe der Zukunft und eine wissenschaftliche Pflicht der heimischen Alterthumsforscher sein, in diesem an vorgeschichtlichen Grabhügeln so reichen Gebiete planmässige Ausgrabungen vorzunehmen. — Eine sehr viel geringere Zahl von Kegelgräbern hat sich im westlichen Theile des von uns betrachteten Gebietes, in den Veltheim-Harbke'schen Forsten nahe an der braunschweigischen Grenze, befunden. Jetzt sollen nach den gütigen Angaben des Herrn Freiherrn v. Veltheim-Harbke und den mir von dem Herrn Revierförster Ph. Paulsen in Harbke zur Verfügung gestellten Kartenskizzen in dem mit Kiefern bestandenen Forstort Birkenbusch, der vorher eine Weidefläche mit wenigen, im Ganzen fünf, alten Eichen und Buchen war, dem aus Laubholz bestehenden Forstort Glüsing gegenüber

auf der Ostseite der Chaussee von Harbke nach Helmstedt, nördlich von dem aus Kiefern und Fichten bestehenden Forstort Steiger gelegen, noch zwei Kegelgräber vorhanden sein. Kleinere Hügel, die vielleicht als Reste ehemaliger Kegelgräber zu deuten sind, kann man hier, wie ich aus eigener Anschauung berichten kann, noch mehrere in den genannten Forsten antreffen. Das benachbarte nordöstlich den Wald begrenzende Feld heisst nach den Angaben des Herrn Revierförsters Ph. Paulsen noch jetzt „Pottfeld“, vielleicht, wie ich vermuthete, nach den Urnenscherben, welche man offenbar beim Einebnen des Landes hier gefunden hat. Dies würde darauf hindeuten, dass früher eine grössere Anzahl von Begräbnissplätzen hier vereinigt war. — Eine planmässige Ausgrabung an den beiden noch gut erhaltenen Kegelgräbern dieses Gebietes zu veranstalten, wozu mir der Besitzer, Herr Freiherr v. Veltheim-Harbke, in freundlicher Weise die Erlaubniss ertheilt hat, war mir noch nicht möglich. Mit grosser Wahrscheinlichkeit ist anzunehmen, dass der Befund ein ähnlicher sein wird, wie ihn vor fast anderthalb Jahrhunderten Christian Ludewig Schäffer an den Gräbern des Timiansberges und des Blauen Berges auf der anderen Seite von Harbke hat feststellen und veröffentlichen können.

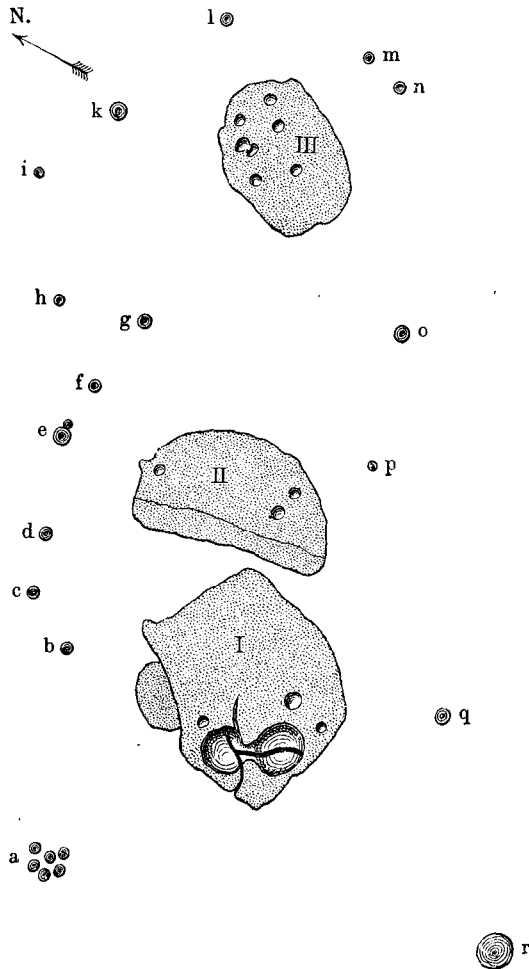
III. Der sogen. „Opferaltar bei Marienborn“.

In dem mit dem Namen „Kreuzschonung“ bezeichneten Königl. Forstdistrict 11, und zwar in dem nördlichsten Zipfel des als ein kaum durchdringbares Dickicht erscheinenden Stangenholzes, das ein fast gleichseitiges Dreieck bildet und von dem „Bierwege“ im Süden, dem alten Helmstedter Stadtwege im Nordosten und von einem dritten Wege im Westen, bezw. Nordwesten begrenzt wird (welcher dieses Dickicht von dem westlich gelegenen Buchenhochwalde scheidet und die Stelle der früher erwähnten Kiesgrube bezw. des Mordkreuzes an dem von Marienborn nach Harbke bezw. nach Helmstedt führenden Fahrwege mit dem alten Helmstedter Stadtwege verbindet) liegt der sogen. „Opferstein“ oder „Opferaltar“ von Marienborn. — Von dem sogen. Bierwege, den man vom Bahnhofe Marienborn über die Wärterbude Nr. 25 in der oben beschriebenen Weise leicht erreicht, gehen nach rechts (Norden) drei Schneisen ab, die erste nach etwa

210 Schritten, wo das Stangenholz (District 10 a) aufhört, — die zweite, etwa nach weiteren 370 Schritten hinter den früher geschilderten Resten des megalithischen Grabdenkmals Nr. 1 und hinter den beiden hohen Lärchentannen, welche das niedrige Waldesdickicht hier überragen, auf der Ostseite der nördlichen Reihe der Kegelgräber nach Norden führend, — und nach fernerem ungefähr 400 Schritten eine dritte Schneise, welche die Forstdistricte 10 und 11 von einander trennt. Etwa 70 Schritt jenseits dieser dritten Schneise zweigt sich halbrechts, als Fortsetzung des jetzt als Holzabfuhrweg benutzten sogen. Papenstieges zunächst ungefähr nach Nordwesten gerichtet, der alte Helmstedter Stadtweg ab. Folgt man diesem Wege etwa 250 Schritt weit in gerader Richtung und dann noch etwa 60 Schritt auf einer nach links gerichteten Krümmung, so geht, ehe der Weg sich wieder rechts wendet, links ein schmaler Fussweg ab, welcher schräg durch das Dickicht in etwa 85 Schritten zum sogen. „Opferaltar“ führt. Die gerade Entfernung desselben von dem alten Helmstedter Stadtwege ist viel geringer, und nur etwa 55 Schritt hat man von der Steingruppe aus zu gehen bis zu dem Fahrwege, welcher das geschilderte Walddreieck im Westen bzw. Nordwesten begrenzt und von dem benachbarten Hochwalde trennt, während die directe Entfernung des sogen. Opferaltars vom Bierwege etwa 300 Schritt beträgt. Auf alle Fälle ist die Entfernung der in Rede stehenden Steingruppe von den Stellen einiger megalithischer Grabdenkmäler und der Hauptstelle von Kegelgräbern in der Umgegend von Marienborn keine sehr beträchtliche. — Die Steingruppe wird aus drei grossen Quarzsandsteinblöcken gebildet, die wohl, ähnlich wie die Felsblöcke der Lübbensteine, als Knollensteine oder Braunkohlenquarzite bezeichnet werden können. Sie liegen in einer ungefähr von WSW nach ONO gerichteten Reihe neben einander, der erste (westlichste) Stein, welcher die grössten und auffallendsten Aushöhlungen besitzt, berührt beinahe den zweiten Stein, während zwischen dem zweiten und dritten Steine ein Zwischenraum von etwa 2,60 m liegt. Der erste Stein ruht an seiner Nordwestseite zum Theil auf einem kleineren Steine von derselben Beschaffenheit, was fast den Anschein erweckt, als ob der grosse Stein künstlich durch Unterschieben des kleineren in seiner Lage regulirt wäre. Der Grundriss und Lage-

plan dieser vier Steine ist ungefähr in der untenstehenden Abbildung (Fig. 1) dargestellt, auf welcher auch die Stellen der der Steingruppe am nächsten stehenden Bäume und Sträucher

Fig. 1.



Grundriss des sog. „Opferaltars bei Marienborn“.
Angefertigt 1901. Maassstab etwa 1:100.

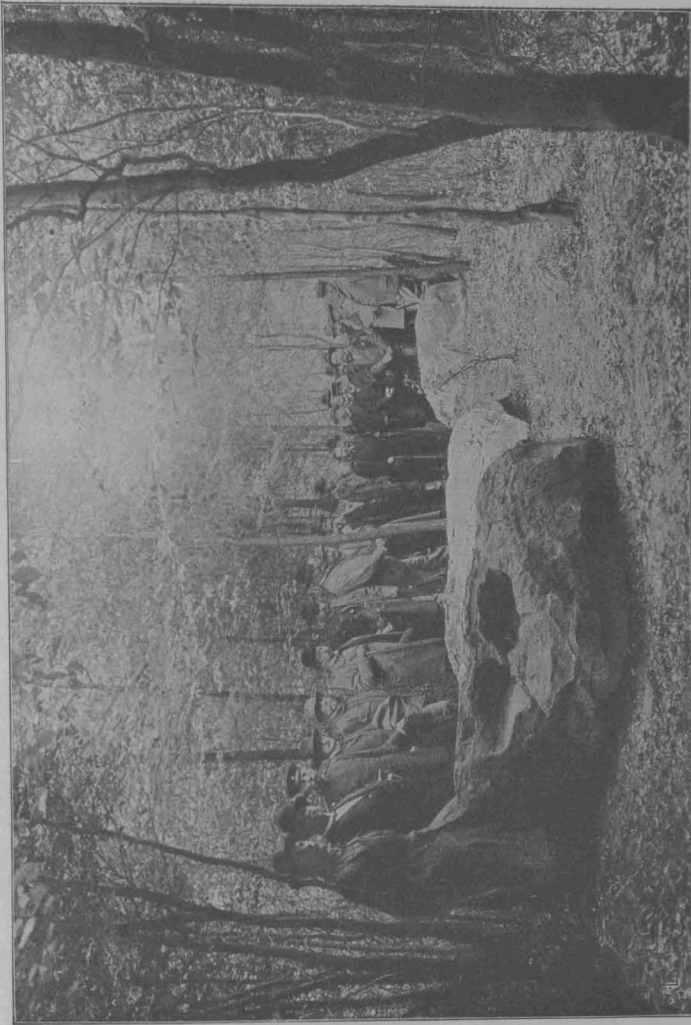
(a, b, d, f, p, q und r: Buchen; l und m: Eichen; die übrigen Lärchentannen) angedeutet sind. Bis zum Frühjahr 1900 waren die Steine fast ganz vom Dickicht des Waldes bedeckt. Aus Veranlassung

eines Besuches, den am 26. Mai jenes Jahres der Verein für Naturwissenschaft zu Braunschweig den vorgeschichtlichen Denkmälern der Gegend zwischen Marienborn und Harbke abstattete, war Herr Forstmeister Ernst Schmidt so gütig, die Steingruppe zuvor freilegen und den oben erwähnten schmalen Fussweg durch das Waldesdickicht bis zu derselben aushauen zu lassen. Bei Gelegenheit jenes Besuches hat der damalige Vorsitzende des Vereins, Herr Director Dr. David Kaempfer in Braunschweig, etwa von SW her eine Photographie der Gruppe aufnehmen lassen, die er so gütig war, mir zur Anfertigung des diesem Aufsätze beigegebenen nebenstehenden Bildes (Fig. 2) zur Verfügung zu stellen, wofür ich ihm den verbindlichsten Dank ausspreche. Auf dem Bilde befindet sich ganz rechts im Vordergrunde der etwas dickere Buchenstamm, der auf der von mir angefertigten Grundrisszeichnung (Fig. 1) mit *r* bezeichnet ist. Links davon fällt in etwas weiterer Entfernung die Buche *q* und die Lärchentanne *o* in die Augen. Vor dem dritten Steine steht der kleine Buchenbusch *p*, etwa in der Mitte hinter dem zweiten Steine die Lärchentanne *g*, und vorn links wird das Bild durch die Buchengruppe *a* eingerahmt. Das Bild und die Grundrisszeichnung führen einigermaassen die äussere Beschaffenheit der Steine vor Augen:

Der erste Stein bildet im Grundriss ein unregelmässiges Fünfeck, dessen grösste Länge in der Richtung der Steinreihe 2,83 m und dessen Breite etwa 2 m beträgt und der sich vorn (auf der Westseite) etwa 75 cm aus dem Erdboden erhebt. Der Stein senkt sich mit seiner oberen Fläche nach hinten (Osten) zu, so dass er hier nur etwa halb so hoch aufragt als am Westende. An dieser auf dem Bilde dem Beschauer zugewendeten Seite ist der Stein terrassenförmig abgesetzt; in etwa zwei Drittel der Höhe finden sich hier neben einander zwei grosse rundliche Vertiefungen, von denen die nördliche (linke) von vorn nach hinten 49 cm, von links nach rechts 44 cm, die südliche (rechte) ebenso 38 cm und 49 cm im Durchmesser misst. Die Rückwand dieser Vertiefungen ist etwas ausgehöhlt, an der linken stärker als an der rechten. Die äussersten Seitenränder beider Vertiefungen zusammen sind von links nach rechts gemessen 96 cm von einander entfernt. Beide Vertiefungen sind offenbar ursprünglich durch eine wenige Centimeter dicke Steinleiste von einander getrennt

gewesen, jetzt aber durch eine vielleicht künstlich hergestellte, jedenfalls künstlich erweiterte Rinne mit einander in Verbindung

Fig. 2.



Der sogenannte „Opferaltar bei Marienborn“.

(Nach einer von Herrn Director Dr. David Kaempfer am 26. Mai 1900 aufgenommenen Photographie.)

gesetzt. Von der rechten Seite des oberen Hinterrandes der linken Vertiefung läuft in einem leichten Bogen ein etwa 40 cm langer Riss nach hinten (Osten) zu, der sich nach vorn in die

Hinterwand der Vertiefung hinein nicht fortsetzt. Statt dessen beginnt links davon an der Hinterwand der linken Vertiefung ein Riss, welcher nach vorn und rechts verläuft, am vorderen Rande des Loches nach links umbiegt und auf diese Weise in einem nach rechts convexen Bogen durch den Boden der Vertiefung und die derselben vorgelagerte Steinecke hindurchgeht, und zwar unter allmählicher Erweiterung so stark in die Tiefe dringend, dass in Folge von Absprengungen selbst die Contour des Grundrisses dadurch beeinflusst wird. Von diesem Risse geht da, wo die zwischen den beiden Vertiefungen liegende Steinleiste durchbrochen ist, nach rechts ein Seitenriss aus, welcher die ganze rechte (südliche) Vertiefung quer nach aussen hin durchsetzt. — Seitwärts über den Vertiefungen befinden sich auf der oberen Fläche des Steines zwei rundliche Löcher (jederseits eins) und hinter der rechten Vertiefung noch ein drittes ähnliches, aber tieferes Loch. Kleinere näpfchenartige Vertiefungen sind auch an anderen Stellen der Oberfläche zu sehen, besonders zwei neben dem linken Loche, wie dies gerade an dieser Stelle auch die Abbildung deutlich zeigt.

Der zweite sich dicht an den ersten anschliessende Stein hat eine stumpf halbmondförmige Grundrissgestalt; er ist flach, auf der Oberfläche aber etwas uneben, im Ganzen horizontal. Die nach Westen gerichtete, winkelig abgesetzte Seitenfläche fällt ungefähr in einem Winkel von 45° ab. Auf der Oberfläche befinden sich einige napfartige Vertiefungen, von denen drei deutlicher hervortreten und in der Grundrisszeichnung angedeutet sind. Der Stein erhebt sich 45 bis 50 cm über der Erdoberfläche und ist 2,68 m lang und 1,50 m breit.

Der dritte Stein ist im Grundriss fast oval, nach SO zu etwas mehr gerade abgeschnitten. Auf der stark gewölbten Oberfläche zeigen sich etwa 6 napfartige Vertiefungen, deren Lage sich aus der Grundrisszeichnung ergibt. Der Stein erhebt sich etwa 54 cm über dem Erdboden und misst etwa 2 m im Längsdurchmesser und 1,50 m in der Breite. —

Wann man auf diese eigenthümlich gebildete Steingruppe in weiteren Kreisen zuerst aufmerksam geworden ist, habe ich nicht mit Sicherheit feststellen können. In dem oben bei den megalithischen

thischen Grabdenkmälern angeführten Satze (S. 232) spricht schon 1776 Jo. Arnold Ballenstedt von „Opfersteinen“, zwischen Helmstedt und Neuholdensleben. Es mag aber sehr fraglich bleiben, ob er mit diesen Worten auf den sogen. „Opferaltar bei Marienborn“ hindeuten wollte. Vielleicht hatte er dabei die schon sehr lange bekannte und mit vielen Sagen in Verbindung gebrachte Steingruppe im Sinne, die als „Heidenkrippe“ bezeichnet wird; vielleicht ist die gewählte Bezeichnung „Opfersteine“ aus der früher weit verbreiteten Ansicht zu erklären, dass die jetzt allgemein als Grabstätten aufgefassten megalithischen Denkmäler als Druidenaltäre zu deuten oder doch vielfach in späterer Zeit als Opferstätten benutzt seien. Jedenfalls habe ich in der älteren Literatur eine besondere Bezugnahme auf unseren vermeintlichen Opferaltar nicht auffinden können. — Es scheint mir fast, als ob die geschilderte Steingruppe im Laufe der letzten Jahrzehnte durch den Herrn Forstmeister Ernst Schmidt in Bischofswald und den kürzlich verstorbenen Alterthumsforscher Herrn Gustav Maass in Altenhausen von Neuem aufgefunden und in der durch den Namen angedeuteten Bestimmung als vorgeschichtliches Denkmal überhaupt zuerst entdeckt ist. Ich glaube mich auch zu erinnern, in den gedruckten Sitzungsberichten des seit 1864 bestehenden und seit 1867 seine Verhandlungen veröffentlichenden Aller-Vereins Ausführungen über den „Opferaltar bei Marienborn“ gesehen zu haben. Gustav Maass hat häufig über vermeintliche Opferstätten im Gebiete des Aller-Vereins gesprochen, so z. B. 1878 über die sogen. „Heidenkrippe“ im Walde nördlich von Eimersleben¹⁾, 1890 über einen als heidnischen Opferstein anzusprechenden Granitblock auf einer wüsten Dorfstelle eine halbe Stunde westlich von Dolle in der Letzlinger Haide²⁾ und über „Die Lübbensteine bei Helmstedt“, wobei er besonders die südliche Gruppe als spätere Opferstätte angesehen wissen wollte³⁾, 1891 über die spätere Verwendung der Hünengräber zu Opferstätten, besonders der sogen. Teufelsküche bei der Alt-

¹⁾ Sitzungsbericht des Aller-Vereins vom 30. December 1878 im Neuholdenslebener bezw. Calvörder Wochenbl. Nr. 32 vom 12. April 1879, Beil. 2. — ²⁾ Sitzungsbericht des Aller-Vereins vom 18. August 1890 im Neuholdenslebener bezw. Calvörder Wochenbl. Nr. 100 vom 30. August 1890, Beil. — ³⁾ Ebenda. Sitzung vom 29. October 1890 in Nr. 139 vom 29. November 1890, Beil. 2.

haldenslebener Ziegelei, der gewaltigen Steinkammer bei Forsthaus Eiche und der südlichen Gruppe der Lübbensteine¹⁾, 1892 über eine alte Opferstätte bei Seehausen²⁾ u. s. w. Dabei ist früher oder später jedenfalls auch des sogen. Opferaltars von Marienborn Erwähnung geschehen. Auf den von Gustav Maass mit grosser Sorgfalt angefertigten und mir freundlichst zur Verfügung gestellten vorgeschichtlichen Karten seines Gebietes fand ich in den neunziger Jahren den Opferaltar von Marienborn, wenn auch nicht ganz an der richtigen Stelle, eingetragen; die schriftlichen und mündlichen Angaben darüber, die ich dem genannten Alterthumsforscher verdanke, haben mir eine wesentliche Anregung zu meinen Untersuchungen gegeben. In den letzten Jahren hat Hermann Grössler in seiner Abhandlung: „Alt-heilige Steine in der Provinz Sachsen“ des Opfersteins bei Marienborn Erwähnung gethan³⁾; doch ist dies nur ganz kurz und nur beiläufig geschehen, da der Aufsatz eingehend nur über die für die Provinz Sachsen charakteristischen Nagelsteine, über Steine, welche durch Einhauen von Zeichen kenntlich gemacht sind, über Steine mit Fusstapfen, Rosstrappen u. dergl. und über Steine handelt, an die sich Sagen knüpfen. — Ich selbst erwähnte den sogen. Opferstein von Marienborn auch ganz kurz in einem Vortrage, den ich am 4. Januar 1900 im hiesigen Verein für Naturwissenschaft über „Vorgeschichtliche Funde und Denkmäler im Flussgebiet der Ohre und westlich bis Helmstedt“ hielt, über welchen in den Tagesblättern berichtet ist⁴⁾. — Dies sind die wenigen literarischen Bezugnahmen auf die in Rede stehende Steingruppe, die ich anführen kann.

Die Frage, ob die Deutung derselben als eines vorgeschichtlichen Opferaltars richtig ist oder nicht, bin ich bis jetzt ausser Stande, zur Entscheidung zu führen. Ich selbst gehöre nicht zu denjenigen, die in jeder kessel- oder schalenartigen Vertiefung eines Felsblockes ein Becken zum Auffangen des Opferblutes,

¹⁾ Sitzungsbericht des Aller-Vereins vom 12. August 1891 im Neuhaldenslebener bzw. Calvörder Wochenbl. Nr. 104 vom 5. September 1891, Beil. — ²⁾ Ebenda. Sitzung vom 2. November 1892 in Nr. 135 vom 19. November 1892, Beil. — ³⁾ Neujahrsblätter, herausgegeben von der Historischen Commission der Provinz Sachsen Nr. 20. Halle, Otto Hendel, 1896. 8°. —

⁴⁾ Braunschweigische Landeszeitung Nr. 18 vom 12. Januar 1900; Wochenblatt für die Kreise Neuhaldensleben u. s. w. Nr. 7 vom 18. Januar 1900.

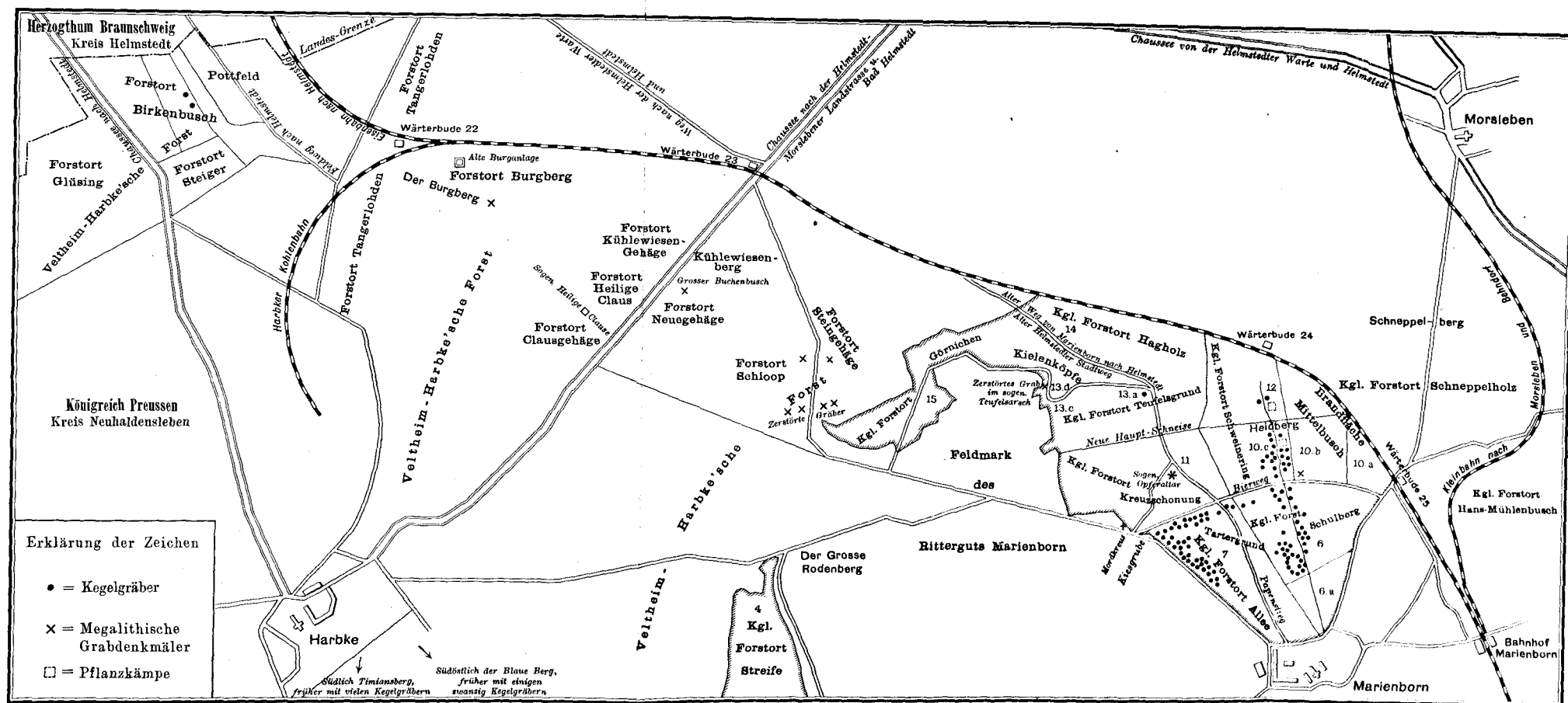
in jeder davon ausgehenden Spalte eine Blutrinne sehen möchten. Durch H. Gruner ist es 1881 klar nachgewiesen, dass die meisten derartigen Erscheinungen Deutschlands ganz natürlichen Ursprunges sind¹⁾. Immerhin ist es möglich, dass die auf natürliche Weise entstandenen Vertiefungen und Rinnen an den Blöcken von unseren Vorfahren zu Opferhandlungen benutzt sind. Und in dem vorliegenden Falle haben wir neben und in den offenbar auf natürlichem Wege entstandenen grossen Vertiefungen einige Spalten und Risse, die auf künstlichem Wege durch menschliche Bearbeitung hergestellt oder doch erweitert zu sein scheinen; ferner erinnere ich nochmals an den dem grossen „Opferstein“ untergelagerten Block, der ebenfalls vielleicht auf eine planmässige Thätigkeit des Menschen hindeutet. — Auch die Stelle, an welcher sich die fragliche Steingruppe findet, spricht nicht gegen eine ehemalige Verwendung zu Opferzwecken. Sie liegt nicht weit von einigen megalithischen Grabdenkmälern der neolithischen Zeit und, wie man fast sagen kann, mitten in dem grossen Friedhof von Kegelgräbern der Bronzeperiode, der sich nördlich und nordwestlich von Marienborn ausbreitet. Zweifelloser Opferaltäre hat man mehrfach in der Nähe vorgeschichtlicher Begräbnisstätten gefunden; ein einwandfreies Beispiel davon bildet die Stonehenge-Gruppe nördlich von Salisbury im südlichen England. Fliessendes Wasser, das man meistens in der Nähe von Opferaltären und Opfersteinen findet, ist zwar nicht unmittelbar neben der in Rede stehenden Steingruppe von Marienborn vorhanden; aber nicht weit davon nördlich liegt der Teufelsgrund, ein tiefes Thal, das wenigstens während eines grossen Theiles des Jahres von Wasser durchflossen wird. — Ich kann es nicht für meine Aufgabe halten, in diesem Aufsätze, der hauptsächlich das Ziel verfolgt, thatsächliche Verhältnisse zu schildern, die ganze Frage der Opferaltäre und Opfersteine aufzurollen, über welche eine sehr grosse Literatur besteht. Mag man über die vorgeschichtliche Benutzung der Steingruppe von Marienborn zu Opferzwecken denken, wie man will; auf alle Fälle handelt es sich bei dem ersten und grössten Steine um

¹⁾ Opfersteine Deutschlands. Eine geologisch-ethnographische Untersuchung. Mit eingedruckten Holzschnitten und vier Steintafeln. Leipzig, Duncker u. Humblot, 1881. 8°. 63 Seiten.

einen sehr interessanten Schalenstein, und alle drei grossen Steine sind als Näpfchensteine zu bezeichnen. Und auch abgesehen von den schalenartigen Vertiefungen und Näpfchen dürften die Steine, wenn sie auch vielleicht nicht in die Reihe von Hermann Grössler's „Altheiligen Steinen der Provinz Sachsen“ gehören, doch jedenfalls sich ehrenvoll den isolirten Steinen anreihen, welche H. Becker 1889 als Seitenstücke zur sogen. Speckseite bei Aschersleben beschrieben und zum Theil abgebildet hat¹⁾. Ein Besuch der Stätte des sogen. „Opferaltars bei Marienborn“ wird jeden Beschauer zu ernstem Nachdenken anregen. — Ich habe nie davon gehört, dass in der nächsten Umgebung und Nachbarschaft dieses Opferaltars Ausgrabungen veranstaltet sind. Vielleicht können solche die aufgeworfene Frage zur Entscheidung bringen. Denn wenn die Steine in alter Zeit zu Opfern benutzt sind, so wird man jedenfalls in der nächsten Umgebung Opfergeräthe, Bruchstücke von Opfergefässen, Knochen und vielleicht auch Kohle und Asche in dem Erdboden finden.

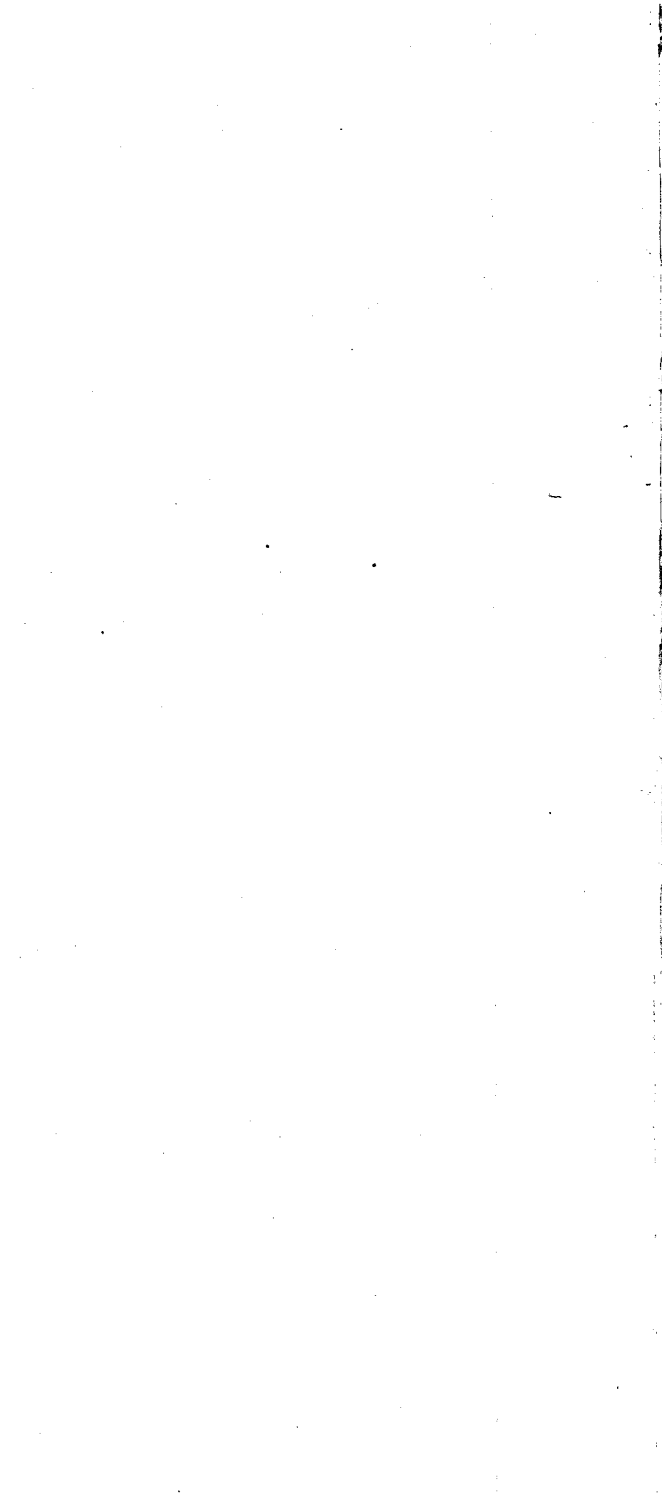
Die Gegend zwischen Helmstedt, Harbke und Marienborn, deren vorgeschichtliche Denkmäler ich, soweit mein Können ausreichte, zu schildern versucht habe, wird wegen ihrer landschaftlichen Schönheiten und wegen des Waldreichthums oft zu Spaziergängen von den Bewohnern der nächsten Ortschaften, besonders der Stadt Helmstedt, benutzt, und nicht nur für diese, sondern auch für die Einwohner der beiden benachbarten Grossstädte Magdeburg und Braunschweig ist die Gegend das häufige Ziel sonntäglicher Wanderung. Es würde mir eine grosse Genugthuung sein, wenn mein Aufsatz dazu beitrüge, diesen Besuchern zu dem Genuss, den das sommerliche Durchstreifen von Wald und Flur bereitet, noch die hohe Befriedigung hinzuzufügen, die die aufmerksame und verständnissvolle Beachtung der erhabenen Zeugen früherer Jahrtausende in jedem denkenden Beobachter erwecken muss. — Möchte mein Aufsatz auch dazu anregen, dass Alles, was von diesen Denkmälern der Vorgeschichte hier noch erhalten ist, auf das Sorgfältigste bewahrt wird und vor muthwilliger oder nachlässiger Zerstörung geschützt bleibt!

¹⁾ Die Speckseite bei Aschersleben. Mit 10 Abbildungen. (Zeitschrift des Harzvereins Jahrgang XXII, 1889, S. 377 bis 406.)



Kartenskizze der Gegend zwischen dem Kreise Helmstedt und den Ortschaften Harbke und Marienborn mit Eintragung der vorgeschichtlichen Denkmäler.

Angefertigt 1901. Maassstab 1 : 25 000.



15. 10. 7